88-165 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
מערכי תרגול

תיכוניסטים, סמסטר ב', תשפ"ב

תוכן העניינים

1 חזרה מתורת הקבוצות **3**

2 קומבינטוריקה **5**

2.1 עיקרון הסכום והמכפלה 5

2.2 בחירה של k מתוך n 6

2.3 זהויות על מקדמים בינומיים 9

3 מרחבי הסתברות בדידים **10**

3.1 הגדרות בסיסיות 10

3.2 מרחבי הסתברות סימטריים 12

3.3 עיקרון ההכלה וההדחה 14

3.4 הסתברות מותנית 16

3.5 תלות ואי-תלות 19

3.6 תרגילים נוספים 21

3.7 נושאים נוספים 24

3.7.1 קירוב סטירלינג 24

3.7.2 פרדוקס יום ההולדת 24

4 משתנים מקריים בדידים **25**

4.1 משתנים מקריים 25

4.2 פונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי 25

4.3 התפלגויות נפוצות, חלק 1 28

4.4 התפלגות משותפת 29

4.5 התוחלת של משתנה מקרי 31

4.6 השונות 34

4.7 השונות המשותפת ומקדם המתאם של פירסון 35

4.8 התפלגויות נפוצות, חלק 2 36

4.9 תוחלת מותנית 42

5 מרחבי הסתברות כלליים **45**
5.1 אלגברות ו-σ-אלגברות 45
5.2 מרחבי הסתברות 47
5.3 רציפות ההסתברות 48
5.4 משתנים מקריים רציפים 49
5.5 טרנספורמציות של משתנים מקריים 52
5.6 זוגות של משתנים מקריים רציפים 54
5.7 התפלגויות רציפות מיוחדות 57

6 נושאים נוספים **61**
6.1 אי-שוויונים 61
6.2 פונקציה יוצרת מומנטים 64
6.3 התכנסויות של משתנים מקריים וחוקי המספרים הגדולים 65
6.4 משפט הגבול המרכזי 66

1 חזרה מתורת הקבוצות

הגדרה 1.1. יהיו A, B קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית Ω.

א. **האיחוד** שלהן, המסומן $A \cup B$, הוא קבוצת האיברים הנמצאים ב-A או ב-B. כלומר

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

ב. **החיתוך** שלהן, המסומן $A \cap B$, הוא קבוצת האיברים הנמצאים ב-A וגם ב-B. כלומר

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

ג. **ההפרש** שלהן, המסומן $A \setminus B$, הוא קבוצת האיברים הנמצאים ב-A ואינם נמצאים ב-B. כלומר

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

ד. **המשלים** של A ב-Ω, המסומן A^c, הוא $\Omega \setminus A$.

ה. **ההפרש הסימטרי** של A ו-B, המסומן $A \triangle B$, הוא קבוצת האיברים הנמצאים בדיוק באחת הקבוצות A ו-B. כלומר

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

ניתן להכליל את הגדרות האיחוד והחיתוך גם למשפחות של תת־קבוצות: יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ תת־קבוצות של Ω עם $I \neq \varnothing$. אז

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\},$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

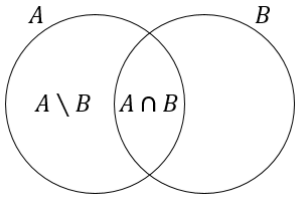
הערה. $A \setminus B = A \cap B^c$.

טענה 1.2 (דה-מורגן). לכל אוסף קבוצות $\{A_i\}_{i \in I}$,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

תרגיל 1.3. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B,

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$



הוכחה. אפשר באמצעות הכלה דו-כיוונית, ואפשר גם באמצעות דה-מורגן:

$$A\setminus(A\setminus B)=A\cap(A\cap B^c)^c=A\cap(A^c\cup B)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B.$$

□

תרגיל 1.4. הוכיחו שלכל שתי קבוצות A,B,

$$(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

הוכחה. נשים לב כי

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cap B)^c&=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=((A\cup B)\cap A^c)\cup((A\cup B)\cap B^c)=\\&=(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)=\\&=\varnothing\cup(B\setminus A)\cup(A\setminus B)\cup\varnothing=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).\end{aligned}$$

□

תרגיל 1.5 (תרגיל שימושי)**.** הוכיחו כי לכל סדרת קבוצות $A_1,A_2,\ldots$ מתקיים

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\biguplus_{n=1}^{\infty}(A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})).$$

(שימו לב: צריך להוכיח גם שהאיחוד באגף ימין הוא איחוד זר.)

הוכחה. נסמן $B_n=A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})$. נוכיח שהאיחוד באגף ימין הוא איחוד זר. אכן, אם $m<n$ אז $B_m=A_m\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{m-1})\subseteq A_m$, ואילו

$$B_n=A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})\subseteq A_n\setminus A_m=A_n\cap A_m^c\subseteq A_m^c.$$

לכן $B_m\cap B_n=\varnothing$, והאיחוד הוא אכן איחוד זר.

כעת נראה שוויון בין שני האגפים. לכל m מתקיים $B_m\subseteq A_m\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supseteq\biguplus_{m=1}^{\infty}B_m$. להכלה $\subseteq$, יהי $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. ניקח את ה-$n$ המינימלי שעבורו $x\in A_n$. לכן $x\notin A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}$, כלומר $x\in A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})=B_n$. מכאן ש-$x\in\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n$, כנדרש. □

הגדרה 1.6.

א. אומרים ש-A ו-B **זרות**, אם $A\cap B=\varnothing$.

ב. אומרים ש-$A_1,\ldots,A_m$ **זרות בזוגות**, אם לכל $1\le i<j\le n$ מתקיים $A_i\cap A_j=\varnothing$.

דוגמה 1.7. ההבדל בין קבוצות זרות בזוגות לקבוצות זרות: הקבוצות $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ו-$\{2,3\}$ הן זרות, אך לא זרות בזוגות.

תרגיל 1.8. נניח ש-A ו-B קבוצות זרות. האם A^c ו-B^c זרות גם כן?

פתרון. לאו! למשל, ניקח $\Omega=\{1,2,3\}$, $A=\{1\}$ ו-$B=\{2\}$. אז $A\cap B=\varnothing$, אבל $A^c\cap B^c=\{2,3\}\cap\{1,3\}=\{3\}$.

הגדרה 1.9. קבוצת החזקה של A, $P(A)$, היא קבוצת כל תת־הקבוצות של A. בשפה מתמטית,

$$P(A)=2^A=\{B\mid B\subseteq A\}.$$

טענה 1.10. אם $|A|=n$, אז $|P(A)|=2^n$.

2 קומבינטוריקה

המטרה הבסיסית של קומבינטוריקה היא ספירת איברים בקבוצות סופיות, כלומר לכל קבוצה סופית A לחשב את $|A|$. בחלק הראשון של הקורס נציג מספר שיטות שעוזרות לחישוב גדלים כאלו.

2.1 עיקרון הסכום והמכפלה

טענה 2.1 (עיקרון הסכום).

א. לכל שתי קבוצות A ו-B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

ב. בפרט: אם A ו-B זרות, נקבל $|A \cup B| = |A| + |B|$.

ג. ל-n קבוצות: אם $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות זרות בזוגות, אז $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

<u>משמעות קומבינטורית:</u> אם A, B זרות, אז מספר האפשרויות שיתרחש $A \cup B$ הוא מספר האפשרויות שיתרחש A ועוד מספר האפשרויות שיתרחש B.

דוגמה 2.2. מספר האפשרויות לבחור תלמיד מתוך כיתה של 15 בנים ו-12 בנות הוא 27.

טענה 2.3 (עיקרון המכפלה).

א. לכל שתי קבוצות A ו-B, $|A \times B| = |A| \times |B|$.

ב. ל-n קבוצות: אם $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות, אז $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot \cdots \cdot |A_n|$.

<u>משמעות קומבינטורית:</u> מספר תוצאותיו של ניסוי בן r שלבים, כשלשלב ה-i יש n_i תוצאות אפשריות, הוא $n_1 \cdot \cdots \cdot n_r$.

תרגיל 2.4. מזהה רישיון רכב מורכב משתי אותיות בעברית ולאחר מכן שלוש ספרות. כמה מזהי רישיונות רכב ניתן ליצור?

פתרון. $22^2 \cdot 10^3 = 484,000$.

תרגיל 2.5. בכמה דרכים ניתן לסדר כדורים אדומים, ירוקים וכחולים בשורה של n כדורים כך שלא יהיו שני כדורים סמוכים עם אותו הצבע?

פתרון. לכדור הימני ביותר יש 3 אפשרויות. לאחר מכן, לכל כדור יש 2 אפשרויות – הרי הוא לא יכול להיות זהה לכדור שהיה מימינו. לכן סך כמות האפשרויות היא $3 \cdot 2^{n-1}$.

הגדרה 2.6. תמורה על קבוצה X היא פונקציה חח"ע ועל $\sigma : X \to X$.

תרגיל 2.7. בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים בשורה?

פתרון. אם נסמן את קבוצת האנשים $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, כל סידור בשורה מתאים לתמורה ($\sigma(x_1)$ יהיה האיש במקום הראשון בשורה, $\sigma(x_2)$ במקום השני וכן הלאה). לכן נספור כמה תמורות יש על הקבוצה X.

עבור $\sigma(x_1)$ יש n אפשרויות; הוא יכול להיות כל איבר של X. עבור $\sigma(x_2)$ יש $n-1$ אפשרויות, שכן הוא לא יכול להיות שווה ל-$\sigma(x_1)$; ניתן להמשיך כך ולקבל של-$\sigma(x_k)$ יש $n-(k-1)$ אפשרויות. בסך הכל $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$.

תרגיל 2.8. בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים במעגל?

פתרון. בתרגיל הקודם בעצם דיברנו על סידור של n אנשים בשורה, וראינו שמדובר ב-$n!$ אפשרויות. כל סידור בשורה אפשר כמובן לתרגם לסידור במעגל, אם נמספר את המקומות של המעגל $1, \ldots, n$. אבל כיוון שלא אכפת לנו מאיפה מתחילים, בעצם ספרנו כל סידור n פעמים, כתלות בנקודת ההתחלה. לכן כמות האפשרויות הכוללת היא $\frac{1}{n} \cdot n! = (n-1)!$.

2.2 בחירה של k מתוך n

	עם החזרה	**ללא החזרה**
עם חשיבות לסדר	n^k	$P(n,k) = {}^nP_k = {}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$	$C(n,k) = {}^nC_k = {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

עם החזרה – האם מותר לבחור את אותו האיבר פעמיים?
עם חשיבות לסדר – האם אנחנו רוצים לספור סידורים של אותם איברים אך בסדר שונה כסידורים נפרדים, או לא?
נסביר כל אחד מהתאים בטבלה.

עם חשיבות לסדר, עם החזרה. הבחירה במקרה הזה שקולה לניסוי שבו יש k צעדים ולכל אחד מהם יש n אפשרויות, בלי קשר לאחרים. מעיקרון המכפלה, יש בסך הכל n^k דרכים.

עם חשיבות לסדר, ללא החזרה. במקרה הזה ניתן שוב להשתמש בעיקרון המכפלה. זה שקול לניסוי שבשלב הראשון יש לו n אפשרויות, בשלב השני יש $n-1$ (כי אסור לבחור את מה שבחרנו בשלב הראשון), בשלב השלישי יש $n-2$ אפשרויות וכן הלאה, עד השלב ה-k-י שבו יש $n-(k-1)$ אפשרויות. בסך הכל

$$n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)\cdots 1}{(n-k)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

בלי חשיבות לסדר, ללא החזרה. נניח שנבחר k עצמים עם חשיבות לסדר אבל ללא החזרה. כל אוסף של k עצמים ספרנו $k!$ פעמים, לפי כמות הדרכים לסדר אותם. לכן כמות הדרכים לבחור k מתוך n בלי חשיבות לסדר וללא החזרה היא

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

והמספר הזה נקרא **המקדם הבינומי של n מעל k**.

בלי חשיבות לסדר, עם החזרה. נדמיין שיש לנו n תאים ואנחנו רוצים לסדר בתוכם k כדורים זהים. במקרה הזה בדיוק מדובר בבחירה בלי חשיבות לסדר ועם החזרה: לכל אחד מ-k הכדורים צריך לבחור לאיזה תא הוא נכנס. לא אכפת לנו באיזה סדר אנחנו מכניסים את הכדורים לתאים אלא רק מה התוצאה הסופית, אך ניתן לבחור את אותו התא פעמיים ולהכניס אליו כמה כדורים.
כעת, זה שקול ל-k כדורים שצריך לשים ביניהם $n-1$ מחיצות; הרווחים שבין המחיצות (כולל החלק שמימין למחיצה הימנית ביותר והחלק שמשמאל למחיצה השמאלית ביותר) יהיו התאים שלנו. אם נדמיין $n+k-1$ מקומות התחלתיים, בעצם צריך לבחור מתוכם $n-1$ שיהיו המחיצות ושאר k המקומות יהיו כדורים. זו בחירה בלי חשיבות לסדר וללא החזרה (כי לא רוצים לבחור את אותו מקום פעמיים), ולכן כמות האפשרויות היא $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

דוגמה 2.9. נניח שמסדרים k כדורים ב-n תאים. זו בחירה של k מתוך n: לכל כדור אנו בוחרים את התא שבו הוא יונח. נתרגם מה אומר כל אחד מהמונחים שאנו מכירים.

- ללא החזרה – אסור לבחור לשני כדורים את אותו התא; כלומר, בכל תא יכול להיות לכל היותר כדור אחד.

- עם החזרה – מותר לבחור לשני כדורים את אותו התא; כלומר, ייתכנו מספר כדורים באותו התא.
- ללא חשיבות לסדר – אין חשיבות לסדר שבו אנו בוחרים את התאים. זה אומר שאם בחרנו לכדור הראשון את תא 1 ולכדור השני את תא 2, לא נראה הבדל לעומת אם בחרנו לכדור הראשון את תא 2 ולכדור השני את תא 1. זה קורה כאשר הכדורים זהים זה לזה.
- עם חשיבות לסדר – יש חשיבות לסדר שבו אנו בוחרים את התאים. כלומר, נראה הבדל אם נשים קודם את הכדור הראשון בתא 1 ואז את הכדור השני בתא 2, לעומת האפשרות ההפוכה. זה קורה כאשר הכדורים שונים זה מזה.

כעת נעבור למספר תרגילים.

תרגיל 2.10. כמה פונקציות יש מהקבוצה $\{1,2,3\}$ לקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

פתרון. רוצים לבחור את $f(i)$ לכל $i \in \{1,2,3\}$. זו בחירה של 3 מתוך 7, עם חשיבות לסדר ועם החזרה. לכן התשובה היא 7^3.

תרגיל 2.11. מהו מספר האפשרויות לבחור 5 ילדים ל-5 תפקידים שונים בהצגה, מתוך קבוצה של 12 ילדים?

פתרון. רוצים לבחור 5 תלמידים מתוך 12; יש חשיבות לסדר (כי התפקידים שונים), ורוצים בחירה ללא החזרה (כי כל תפקיד צריך שחקן אחר). אז בסך הכל יש $\frac{12!}{7!} = 95,040$ דרכים לעשות זאת.

תרגיל 2.12. בכמה דרכים ניתן לבחור ארבעה מתנדבים להדגמת קסם במופע של 100 אנשים בקהל?

פתרון. זו בחירה ללא החזרה וללא חשיבות לסדר, ולכן התשובה היא $\binom{100}{4}$.

תרגיל 2.13. כידוע, כדי לזכות במשחק לוטו טיפוסי בישראל צריך לנחש נכונה את ששת המספרים העולים בגורל (לא ייצא אותו מספר פעמיים, ואין חשיבות לסדר שבו הם ייצאו), וכן לנחש את "המספר החזק" שהוא מספר בין 1 ל-7. בהנחה שאני ממלא טפסי לוטו בצורה אקראית לחלוטין, מה הסיכוי שלי לזכות בלוטו?

פתרון. בעצם השאלה היא כמה טפסי לוטו אפשריים יש. עבור המספרים הרגילים, צריך לבחור 6 מתוך 37, בלי החזרה וללא חשיבות לסדר, ולכן מדובר על $\binom{37}{6}$ אפשרויות; לכל אחת מהן יש את המספר החזק, שלו 7 אפשרויות. לכן כמות הלוחות האפשריים היא

$$\binom{37}{6} \cdot 7 = 16273488,$$

והסיכוי לזכות בלוטו הוא $\frac{1}{16273488}$.

תרגיל 2.14. שולפים 5 קלפים מתוך חבילה של 30 קלפים – 10 אדומים, 10 כחולים ו-10 ירוקים, כששני קלפים בעלי אותו צבע נחשבים זהים. חמשת הקלפים נשלפים בבת אחת, ולכן אין חשיבות לסדר. כמה אפשרויות יש לחמישיית הקלפים הנשלפת?

פתרון. זו בחירה של 5 מתוך 3 עם החזרה (כי מותר לשלוף את אותו הצבע מספר פעמים) ובלי חשיבות לסדר (כי הקלפים נשלפים ביחד). לכן בסך הכל יש $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$ דרכים.

איך לפרש את זה? ניתן להתאים כל חמישיית קלפים שנשלפה בסוף למחרוזת הבנויה משלושה חלקים (אדום, כחול וירוק) ומשתי מחיצות המפרידות ביניהם. במחרוזת הזו יהיו שבעה מקומות ומתוכם צריך לבחור את שני המקומות של המחיצות שלנו. זו בחירה ללא החזרה (כי לא רוצים לבחור את אותו המקום פעמיים) וללא חשיבות לסדר (כי זה לא משנה באיזה סדר בוחרים את מיקום המחיצות), ולכן יש בסך הכל $\binom{7}{2} = 21$ אפשרויות.

תרגיל 2.15. מהו מספר האפשרויות לחלק 25 כדורים זהים ל-6 תאים שונים? (מותר שיישארו תאים ריקים.)

פתרון. זו בחירה של 25 מתוך 6 (לכל כדור בוחרים את התא המתאים לו). זו בחירה עם החזרה (כי מותר לשים שני כדורים באותו התא) וללא חשיבות לסדר (כיוון שהכדורים זהים), ולכן בסך הכל יש $\binom{25+6-1}{6-1} = \binom{30}{5}$ אפשרויות.

את שתי השאלות האחרונות ניתן לתרגם גם למשוואות:

- אם נסמן את כמויות הכדורים בשאלה הראשונה על ידי R, B ו-G, אז רוצים לדעת כמה פתרונות יש למשוואה $R+G+B=5$ כאשר $R,G,B \geq 0$.
- אם נסמן את כמויות הכדורים בכל תא $x_1,\ldots,x_6$, אז כל $x_i \geq 0$ הוא מספר שלם ו-$x_1+\cdots+x_6=25$.

מסקנה 2.16. כמות הפתרונות של המשוואה $x_1+\cdots+x_k=n$, כאשר כל $x_i \geq 0$ הוא מספר שלם, היא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

הוכחה. ניתן לתרגם את המשוואה לחלוקה של n כדורים זהים ל-k תאים. זו בחירה עם החזרה (כי מותר לשים שני כדורים באותו התא) וללא חשיבות לסדר (כיוון שהכדורים זהים), ולכן בסך הכל יש $\binom{n+k-1}{k-1}$ דרכים לעשות זאת. □

תרגיל 2.17. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+\cdots+x_4=12$ כאשר $x_i \geq 0$ לכל i? וכמה פתרונות יש אם ידוע שלפחות אחד מהמשתנים הוא 0?

פתרון. לפי המסקנה הקודמת, כמות הפתרונות למשוואה היא $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3} = \frac{15\cdot14\cdot13}{6} = 5\cdot7\cdot13 = 455$.

לגבי החלק השני, נחשב את מספר הפתרונות כאשר כל המשתנים חיוביים ממש. אם נגדיר $y_i = x_i - 1$, אז כל $y_i \geq 0$, וגם $y_1+\cdots+y_4 = 8$. לכן כמות הפתרונות היא $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11\cdot10\cdot9}{6} = 11\cdot5\cdot3 = 165$. והכמות של הפתרונות של המשוואה המקורית שבהם לפחות אחד המשתנים הוא 0 היא $455-165=290$.

הגדרה 2.18. יהי $n \in \mathbb{N}$ ו-$m_1,\ldots,m_k \in \mathbb{N}$ כך ש-$m_1+\cdots+m_k = n$. **המקדם המולטינומי של n מעל** $m_1,\ldots,m_k$ מוגדר להיות

$$\binom{n}{m_1,\ldots,m_k} = \frac{n!}{m_1!\cdots m_k!}.$$

הוא סופר את כמות הדרכים לחלק n כדורים לקבוצות בגודל $m_1,\ldots,m_k$.

תרגיל 2.19. מה מספר האפשרויות לחלק 7 תלמידים ל-3 קבוצות, אחת עם 3 תלמידים והשתיים האחרות עם 2 תלמידים?

פתרון. באמצעות המקדם המולטינומי,

$$\cdot\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

(אפשר גם לפתור עם מקדמים בינומיים: לבחירת הקבוצה הראשונה יש $\binom{7}{3}$ אפשרויות, לשנייה יש $\binom{4}{2}$ ולשלישית יש $\binom{2}{2}=1$, ובסך הכל $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$).

2.3 זהויות על מקדמים בינומיים

מקדמים בינומיים הם מושג חשוב בהרבה מקומות. יש כל מיני קשרים בין מקדמים בינומיים שונים, שניתן להוכיח בשתי דרכים מרכזיות:

- דרך קומבינטורית – מראים ששני הצדדים של המשוואה סופרים את אותה הכמות.
- דרך אלגברית – באמצעות פתיחת הביטויים מראים ששני הצדדים שווים.

משולש פסקל. המקדמים הבינומיים $\binom{n}{k}$ מוגדרים לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ולכל $0\le k\le n$. אם נסדר אותם במשולש, נקבל את משולש הפסקל:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & & & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & & \\
 & 1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}$$

איור 1: משולש פסקל

אפשר לראות שלמשולש הזה יש הרבה סימטריות. למשל:

דוגמה 2.20. נסתכל על הזהות

$$\cdot\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- הוכחה קומבינטורית: $\binom{n}{k}$ הוא מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר וללא החזרה. אבל בחירה כזו של k מתוך n שקולה לבחירה של $n-k$ העצמים שלא ניקח איתנו, ולכן האגפים שווים.
- הוכחה אלגברית:

$$\cdot\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

לפעמים קל יותר להוכיח באחת הדרכים, ואז מספיק להשתמש רק בה.

תרגיל 2.21. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

הוכחה. אנו יודעים כי 2^n היא כמות תת־הקבוצות של הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. נראה שזהו גם הגודל שנספר באגף שמאל. $\binom{n}{k}$ היא כמות תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ מגודל k; אכן, זו בחירה ללא חשיבות לסדר וללא החזרה. לכן הסכום באגף שמאל גם הוא כמות תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$. □

משפט 2.22 (הבינום של ניוטון)**.** לכל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

התרגיל הקודם מתקבל מהמשפט על ידי הצבת $a = b = 1$.

דוגמה 2.23. המקדם של x^2y^3 בביטוי $(x+y)^5$ הוא $\binom{5}{2} = 10$.

תרגיל 2.24 (אם יש זמן)**.** הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ אי-זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1} .$$

הוכחה. נשתמש בבינום של ניוטון עם $a = -1$ ו-$b = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0 .$$

מצד שני,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ אי-זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} .$$

לכן שני הסכומים האלו שווים. אך סכומם הוא 2^n לפי התרגיל הקודם, ולכן כל אחד מהם שווה 2^{n-1}. □

3 מרחבי הסתברות בדידים

3.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 3.1.

א. **מרחב מדגם** יהיה עבורנו כל התוצאות האפשריות בניסוי כלשהו. לרוב נסמן אותו על ידי Ω. מרחב המדגם יכול להיות סופי או אינסופי.

ב. **מאורע פשוט** הינו תוצאה אפשרית אחת של הניסוי.

ג. **מאורע** הינו אוסף של מספר תוצאות אפשריות של הניסוי.

הגדרה 3.2. יהי Ω מרחב מדגם (בינתיים סופי או בן מנייה). **פונקציית הסתברות** היא פונקציה $P : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. לכל $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$.

ב. לכל אוסף סופי או בן־מנייה של מאורעות זרים בזוגות $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ מתקיים $P\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

ג. $P(\Omega) = 1$.

לזוג (Ω, P) נקרא **מרחב הסתברות** (**בדיד**).

הערה. בהמשך נדבר על מרחבי הסתברות רציפים, שבהם מרחב המדגם יכול להיות גם לא בן מנייה.

דוגמה 3.3. נסתכל על המרחב של הטלות מטבע $\Omega = \{H, T\}$. במקרה זה ניתן להגדיר פונקציית הסתברות $P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$ שמתאימה להטלה של מטבע הוגן. במקרה שבו המטבע לא הוגן, אפשר להגדיר פונקציית הסתברות אחרת: למשל $P(\{H\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{T\}) = \frac{1}{3}$.

תרגיל 3.4 (לפעמים נעשה בהרצאה)**.** יהי (Ω, P) מרחב הסתברות.

א. לכל $A \subseteq \Omega$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

ב. אם $A \subseteq B$, אז $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

ג. אם $A \subseteq B$, אז $P(A) \leq P(B)$.

ד. לכל $A, B \subseteq \Omega$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

הוכחה.

א. נזכור כי $\Omega = A \uplus A^c$. לפי תכונות 2 ו-3,

$$1 = P(\Omega) = P(A \uplus A^c) = P(A) + P(A^c).$$

ב. נזכור כי $B = A \uplus (B \setminus A)$, ולכן

$$P(B) = P(A \uplus (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A).$$

ג. נובע ישירות מהסעיף הקודם, כי $P(B \setminus A) \geq 0$.

ד. נשים לב כי $A \cup B = A \uplus (B \setminus A) = A \uplus (B \setminus (A \cap B))$, ולכן

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

כנדרש.

□

תרגיל 3.5. לקוח מגיע לבית קפה. ההסתברות שהלקוח יזמין קפה היא 0.7, ההסתברות שיזמין מאפה היא 0.6, וההסתברות שיזמין קפה או מאפה היא 0.8.

א. תארו את מרחב המדגם.

ב. מהי ההסתברות שיזמין קפה ומאפה?

ג. מהי ההסתברות שיזמין פריט אחד?

פתרון.

א. מרחב המדגם Ω מכיל את כל האפשרויות להזמנה של הלקוח. ניעזר בסימוני עזר: אם A הוא המאורע שהלקוח יזמין קפה, ו-B הוא המאורע שהלקוח יזמין מאפה, אז מרחב המדגם הוא $\Omega = \{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$.

ב. נתרגם את הנתונים: $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.6$ ו-$P(A \cup B) = 0.8$. לפי התרגיל הקודם,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.7 - 0.8 = 0.5.$$

ג. כעת, רוצים לחשב את

$$P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

כשבמעבר הראשון השתמשנו בכך ש-$A \cap B \subseteq A \cup B$.

3.2 מרחבי הסתברות סימטריים

הגדרה 3.6. מרחב הסתברות סימטרי הוא מרחב הסתברות סופי (Ω, P) כך שלכל $A \subseteq \Omega$ מתקיים $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. כלומר, כל תוצאה בניסוי מתקבלת בסיכוי זהה, וכל מה שמעניין אותנו הוא כמה תוצאות אפשריות יש במאורע A וכמה יש במרחב המדגם Ω.

לכן כל מה שלמדנו בקומבינטוריקה לא היה לשווא; בכל שאלה על מרחב הסתברות סימטרי, עובדים לפי המודל הבא:

- מגדירים את מרחב המדגם Ω;
- סופרים כמה איברים יש ב-Ω;
- מגדירים את המאורע A כתת־קבוצה של Ω;
- סופרים כמה איברים יש ב-A;
- מחלקים את הכמויות שקיבלנו.

תרגיל 3.7. רותם וירון זוג מבולגן וחובב גרביים. במגירת הגרביים שלהם מפוזרים באקראי 7 גרביים שחורים, 9 כחולים ו-8 עם ציורים של דינוזאורים. ירון קם לעבודתו בבית הספר ליידי דייויס ושולף מן המגירה 2 גרביים באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. ירון בחר 2 גרביים מאותו הסוג.

ב. ירון בחר לפחות גרב אחד שחור.

ג. ירון בחר גרב אחד שחור וגרב אחד עם דינוזאורים.

פתרון. מרחב המדגם שלנו Ω הוא כל הזוגות של גרביים במגירה. נשים לב שאין חשיבות לסדר כי הגרביים נשלפים ביחד, ולא ניתן לשלוף את אותו הגרב פעמיים. לכן $|\Omega| = \binom{24}{2} = \binom{7+8+9}{2} = 276$.

א. נסמן את המאורע שלנו A. נפרק למקרים לפי עיקרון הסכום: המאורע שלנו A מורכב מאיחוד זר של שלושה מאורעות: שולפים שני גרביים שחורים ($\binom{7}{2}$ אפשרויות), שולפים שני גרביים כחולים ($\binom{8}{2}$ אפשרויות), ושולפים שני גרביים ירוקים ($\binom{9}{2}$ אפשרויות). בסך הכל

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{2} + \binom{8}{2} + \binom{9}{2}}{276} = \frac{85}{276}.$$

ב. נסמן את המאורע על ידי B. נחשב את המאורע המשלים, שבו לא בחרנו אף גרב שחור. במקרה הזה מותר לנו רק לבחור מתוך 17 גרביים, לכן

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{|B^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{17}{2}}{276} = 1 - \frac{136}{276} = \frac{140}{276}.$$

ג. נסמן את המאורע על ידי C. יש לנו 7 אפשרויות לבחור גרב שחור ו-8 אפשרויות לבחור גרב כחול, לכן

$$P(C) = \frac{8 \cdot 7}{276} = \frac{56}{276} = \frac{14}{69}.$$

תרגיל 3.8. 8 אנשים עומדים וביניהם אליס, בוב, גל ודור מסתדרים בשורה באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. אליס וגל עומדות זו ליד זו.

ב. בוב או דור נמצאים בקצה.

ג. אליס וגל עומדות זו ליד זו, אבל בוב ודור לא עומדים אחד ליד השני.

פתרון. פה מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל הסידורים האפשריים של שמונה אנשים בשורה; לכן $|\Omega| = 8!$.

א. נסמן את המאורע על ידי A. במקרה הזה נחשוב על אליס ועל גל כעל "בלוק" אחד. כעת יש לסדר 7 אובייקטים בשורה, כשאחד מהם הוא ה"בלוק" והיתר הם ששת האנשים האחרים. סך האפשרויות לסידור הוא $7!$. נכפול בכמות האפשרויות לסידור הפנימי של הבלוק, שהיא $2! = 2$, ונקבל ש-$|A| = 7! \cdot 2!$. לכן

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7! \cdot 2!}{8!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

ב. נסמן את המאורע על ידי B. ניעזר במשלים B^c, שבו בוב ודור לא עומדים בקצה. נסדר את שמונת האנשים כך: ראשית נמצא מקום לבוב, לזה יש 6 אפשרויות; כעת נמצא מקום לדור מבין 5 האפשרויות שאינן בקצה שנותרו; ונסדר את שאר 6 האנשים בשורה ($6!$ אפשרויות). בסך הכל $|B^c| = 6 \cdot 5 \cdot 6!$. לכן

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 6!}{8!} = 1 - \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = 1 - \frac{15}{28} = \frac{13}{28}.$$

ג. נסמן על ידי C את המאורע שבו אליס וגל עומדות זו ליד זו וגם בוב ודור עומדים זה ליד זו, ועל ידי D את המאורע שבו אליס וגל עומדות זו ליד זו אבל בוב ודור לא עומדים זה ליד זה. נשים לב כי $D = A \setminus C$ וכי $C \subseteq A$; לכן $P(D) = P(A) - P(C)$. נחשב את ההסתברות של C: בדומה לחישוב A, הפעם נייצר שני בלוקים, נסדר את 6 האובייקטים שנשארו, ואז נסדר כל אחד מהבלוקים באחד מ-$2! = 2$ הסידורים הפנימיים שלו. בסך הכל

$$P(D) = P(A) - P(C) = \frac{1}{4} - \frac{6! \cdot 2! \cdot 2!}{8!} = \frac{1}{4} - \frac{4}{56} = \frac{1}{4} - \frac{1}{14} = \frac{5}{28}.$$

3.3 עיקרון ההכלה וההדחה

תזכורת. עבור שתי קבוצות A, B, מתקיים

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

מה לגבי שלוש קבוצות?

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C).$$

היינו רוצים להבין איך לחשב באופן דומה את ההסתברות של איחוד סופי של קבוצות סופיות.

טענה 3.9 (עיקרון ההכלה וההדחה). לכל אוסף קבוצות $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

מסקנה 3.10. אם מסכימים שהחיתוך בגודל 0 של תת־קבוצות של Ω הוא כל Ω,

$$P\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

תרגיל 3.11. מגרילים מספר באופן אחיד בין 1 ל-1000. מה הסיכוי שהוא יתחלק ב-2, ב-3 או ב-5?

פתרון. נגדיר את המאורעות A_2, A_3 ו-A_5 כאוסף כל המספרים בין 1 ל-1000 המתחלקים ב-2, ב-3 וב-5 בהתאמה. אנחנו רוצים לחשב את $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$. נחשב את גדלי הקבוצות:

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500; \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333; \qquad |A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200.$$

כעת, החיתוך $A_2 \cap A_3$ מכיל את כל המספרים המתחלקים ב-2 וב-3, ולכן מכיל בדיוק את המספרים המתחלקים ב-6. משיקול דומה עבור $A_2 \cap A_5$ ו-$A_3 \cap A_5$,

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166; \quad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100; \quad |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66.$$

המספרים הנמצאים ב-$A_2 \cap A_3 \cap A_5$ הם בדיוק המספרים בין 1 ל-1000 המתחלקים ב-30, ולכן

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33.$$

לפי עיקרון ההכלה וההדחה,

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \frac{1}{|\Omega|}\left(|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|\right) =$$
$$= \frac{1}{1000}\left(500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33\right) = 0.734.$$

מסקנה 3.12. נניח שהקבוצות "סימטריות", כלומר החיתוכים בגודל k תמיד שווים זה לזה בגודלם. אז אפשר לקבל ניסוח פשוט יותר:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$$

ועבור המשלים:

$$P\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

תרגיל 3.13. $2n$ אנשים שמחולקים ל-n זוגות מתיישבים באקראי סביב שולחן מעגלי. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

א. כל הזוגות יושבים יחד?

ב. רק $n-1$ זוגות יושבים ביחד?

ג. אף זוג אינו יושב ביחד?

פתרון. מרחב המדגם שלנו Ω מכיל את כל הסידורים האפשריים של $2n$ אנשים במעגל. כפי שחישבנו בתרגול הקודם, $|\Omega| = (2n-1)!$.

א. נסמן את המאורע על ידי A. נחשוב על כל זוג כעל בלוק, נסדר את הבלוקים, ולאחר מכן נבחר את הסידור הפנימי של כל בלוק. יש n בלוקים שמסדרים במעגל, לכן כמות האפשרויות לסידור שלהם היא $(n-1)!$; לכל בלוק יש 2 סידורים פנימיים אפשריים, ובסך הכל
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^n \cdot (n-1)!}{(2n-1)!}.$$

ב. נסמן את המאורע על ידי B. נחלק את הבחירה של סידור למספר שלבים. בשלב הראשון צריך לבחור איזה אחד מבין n הזוגות יהיה הזוג שמופרד (n אפשרויות). בשלב השני נסדר את $n-1$ הזוגות האחרים כך שיישארו יחדיו (בדומה לסעיף הקודם, $2^{n-1} \cdot (n-2)!$). כעת נמקם את הראשון מהזוג שבחרנו באחד המקומות בין $n-1$ הבלוקים שסידרנו ($n-1$ אפשרויות), ואת השני מהזוג באחד מבין $n-2$ המקומות שנותרו ($n-2$ אפשרויות). בסך הכל

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{n \cdot 2^{n-1} \cdot (n-2)! \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(2n-1)!} = \frac{2^{n-1} \cdot (n-2) \cdot n!}{(2n-1)!}.$$

ג. נסמן על ידי C_i את המאורע שבו הזוג ה-i יושב זה ליד זה. אנו רוצים לחשב את $P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c\right)$. גם פה הקבוצות סימטריות, ולכן

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P\left(C_1 \cap \cdots \cap C_k\right).$$

נחשב את ההסתברות של החיתוכים. בחיתוך $C_1 \cap \cdots \cap C_k$ מופיעים כל הסידורים שבהם k זוגות נמצאים ביחד. שוב על ידי שיטת הבלוקים, נקבל שיש $2n-2k$ אנשים ו-k בלוקים, ולכן יש $(2n-k-1)!$ דרכים לסדר אותם במעגל ו-2^k סידורים פנימיים אפשריים. לכן

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^k \cdot (2n-1-k)!}{(2n-1)!}.$$

3.4 הסתברות מותנית

הגדרה 3.14. יהיו $A, B \subseteq \Omega$ מאורעות כלשהם כך ש-$P(B) > 0$. **ההסתברות של A בהינתן ש-B התרחש** היא ההסתברות

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

תרגיל 3.15. בכד יש 10 כדורים שחורים, 10 כדורים לבנים ו-5 כדורים צהובים. הוצאנו כדור שאינו שחור.

א. מה ההסתברות שהוא צהוב?

ב. מה ההסתברות שהוא לבן?

פתרון. אפשר לפתור את השאלה בשתי דרכים. דרך ראשונה: אם ידוע שלא הוצאנו כדור שחור, מרחב המדגם שלנו הצטמצם – לכך שיצא כדור לבן או צהוב. יש 10 כדורים לבנים ו-5 צהובים, ולכן ההסתברות שהכדור צהוב היא $\frac{1}{3}$ וההסתברות שהוא לבן היא $\frac{2}{3}$.

בדרך השנייה, ניתן לחשב ישירות לפי ההגדרה. נסמן את המאורעות על ידי A – יצא כדור שחור, B – יצא כדור לבן, C – יצא כדור צהוב. אז אנחנו רוצים לחשב את

$$P(C \mid A^c) = \frac{P(C)}{P(A^c)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

ובדומה עבור $P(B \mid A^c) = \frac{2}{3}$.

הערה. הפונקציה $P(\cdot \mid B)$ מגדירה בפני עצמה פונקציית הסתברות. במקרה זה, המשלים של $A \mid B$ הוא $A^c \mid B$.

הערה. יש סימטריה בין המאורעות: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, ומכאן ניתן לגזור את חוק בייס:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

נציג עוד שתי טענות חשובות בהקשר הסתברות מותנית:

משפט 3.16 (נוסחת ההסתברות השלמה)**.** תהי $A_1, A_2, \ldots, A_n$ חלוקה של מרחב המדגם (כלומר הקבוצות A_i זרות בזוגות וכן $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$). אז לכל $B \subseteq \Omega$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

(הטענה נכונה גם לחלוקה עם מספר בן־מנייה של קבוצות.)

משפט 3.17 (עיקרון הכפל)**.** יהיו $A_1, \ldots, A_n$ מאורעות כלשהם. אזי

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

תרגיל 3.18. בכד יש 5 כדורים, מתוכם 2 לבנים ו-3 שחורים. נוציא באקראי 2 כדורים: אם הראשון לבן – נשאיר אותו בחוץ ואז נוציא את השני, ואם הראשון שחור – נחזיר אותו פנימה ונוציא את הכדור השני.

א. מה ההסתברות שהכדור השני שחור?

ב. אם הכדור השני שהוצאנו שחור, מה ההסתברות שהכדור הראשון היה לבן?

פתרון. אפשר לצייר עם עץ ולחשב את ההסתברויות, ובאופן שקול להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(\text{הכדור השני שחור}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{25} + \frac{3}{10} = \frac{33}{50}.$$

כעת, לפי חוק בייס,

$$P(\text{הכדור הראשון לבן} \mid \text{הכדור השני שחור}) = \frac{P(\text{הכדור הראשון לבן}) \cdot P(\text{הכדור השני שחור} \mid \text{הכדור הראשון לבן})}{P(\text{הכדור השני שחור})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{33}{50}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{33}{50}} = \frac{5}{11}.$$

תרגיל 3.19. בחברת "בדיקורונה" פיתחו בדיקות קורונה. החברה בדקה את יעילות הבדיקה שלה על אוכלוסייה ש-10% ממנה חולים, וקיבלה שבסך הכל 2% מהבדיקות חזרו חיוביות. כמו כן, לבדיקה אין positive false, כלומר אם אדם הוא בריא, הבדיקה תצא שלילית.

א. אם התוצאה של אדם חזרה שלילית, מה הסיכוי שהוא חולה?

ב. אם אדם חולה, מה הסיכוי שהתוצאה של הבדיקה תחזור שלילית?

פתרון. נסמן על ידי A את המאורע שהאדם בריא ועל ידי B את המאורע שהבדיקה חזרה חיובית. נכתוב את הנתונים בטבלה ונמלא אותה:

	בדיקה שלילית B	בדיקה חיובית B^c	
האדם חולה A	0.08	0.02	0.1
האדם בריא A^c	0.9	0	0.9
	0.98	0.02	

(מה שצבוע בכחול הוא מידע שהשלמנו לפי הנתונים). נחשב את ההסתברויות הדרושות:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.08}{0.98} = \frac{4}{49} \approx 0.082,$$

ולפי חוק בייס,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{49} \cdot \frac{49}{50}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{1}{10}} = \frac{20}{25} = 0.8.$$

תרגיל 3.20. תהי S קבוצה בת n איברים. מבין 2^n תת־הקבוצות של S נבחר באקראי ועם החזרה שתי קבוצות A ו־B.

א. חשבו את ההסתברות ש־A בת k איברים.

ב. היעזרו בסעיף א' כדי לחשב את ההסתברות ש־$A \subseteq B$.

פתרון.

א. יש $\binom{n}{k}$ תת־קבוצות של S מגודל k, ולכן $P(\{|A| = k\}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

ב. נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה ביחס למאורעות $\{|A| = k\}$:

$$P(\{A \subseteq B\}) = \sum_{k=0}^{n} P(\{A \subseteq B\} \mid \{|A| = k\}) \cdot P(\{|A| = k\}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^n}{4^n}.$$

תרגיל 3.21. מטילים על השולחן מטבעות הוגנים עד שיוצא בפעם הראשונה "עץ", ואז מגרילים באקראי מטבע מבין המטבעות שעל השולחן. מהי ההסתברות שהמטבע שנבחר ייצא "עץ"?

פתרון. נסמן על ידי B את המאורע שהמטבע שנרים מן השולחן יהיה "עץ". ניעזר בנוסחת ההסתברות השלמה על החלוקה הבאה של המרחב: A_n = כל ההטלות שבהן יצא "עץ" בפעם הראשונה בהטלה ה־n. (זו אמנם לא חלוקה בדיוק של כל המרחב, כי נשאר מאורע פשוט אחד שלא נכנס לחלוקה – כל ההטלות הן "פלי", אך זהו מאורע מהסתברות 0 ולכן הוא לא משפיע):

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B \mid A_n) \cdot P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

ניזכר מאינפי 2 כי טור טיילור של $\ln(1+x)$ הינו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$; לכן טור טיילור של $\ln(1-x)$ הוא $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, ונקבל

$$P(B) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

תרגיל 3.22. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות, ויהי $B \subseteq \Omega$ מאורע בעל הסתברות חיובית. נתבונן במרחב ההסתברות (Ω, Q) כאשר פונקציית ההסתברות Q מוגדרת באופן הבא: $Q(A) = P(A \mid B)$.

א. יהי C מאורע עם הסתברות חיובית תחת Q (כלומר $Q(C) > 0$). הוכיחו כי $B \cap C$ הוא מאורע בעל הסתברות חיובית תחת P.

ב. הוכיחו כי $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$ לכל $A \subseteq \Omega$.

ג. השתמשו בתוצאה מסעיף ב' כדי לבטא את נוסחת ההסתברות השלמה במרחב ההסתברות (Ω, Q) במונחים של P בלבד.

הוכחה.

א. לפי ההגדרה $P(B \cap C) \cdot P(B) = P(C \mid B) = Q(C) > 0$. לכן בהכרח $P(B \cap C) > 0$.

ב. מחישוב ישיר,

$$Q(A \mid C) = \frac{Q(A \cap C)}{Q(C)} = \frac{P(A \cap C \mid B)}{P(C \mid B)} = \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)}}{\frac{P(B \cap C)}{P(B)}} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A \mid B \cap C).$$

ג. תהי $C_1, \ldots, C_n$ חלוקה של Ω. אזי

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{n} Q(A \mid C_i) \cdot Q(C_i)$$

ובמונחי P נקבל

$$P(A \mid B) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B \cap C_i) \cdot P(C_i \mid B).$$

□

3.5 תלות ואי-תלות

הגדרה 3.23. נאמר כי מאורעות A ו-B הם **בלתי־תלויים**, אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. אחרת, נאמר שהם **תלויים**.

הערה. A ו-B בלתי־תלויים אם ורק אם $P(A \mid B) = P(A)$, אם ורק אם $P(B \mid A) = P(B)$. כלומר, התרחשותו של אחד המאורעות לא משפיעה על התרחשות המאורע השני.

הערה. מאורעות זרים הם בהכרח תלויים! כי אם אנחנו יודעים שאחד התרחש, אנחנו יודעים אוטומטית שהשני לא התרחש.

תרגיל 3.24. נטיל שתי קוביות. יהי A המאורע "סכום הקוביות שהוטלו זוגי", B המאורע "סכום הקוביות שהוטלו מתחלק ב-3", ו-C המאורע "סכום הקוביות שהוטלו מתחלק ב-5".

א. האם A ו-B תלויים?

ב. האם A ו-C תלויים?

פתרון. נחשב את ההסתברויות. כדי שסכום הקוביות יהיה זוגי, לכל הטלה של אחת הקוביות יש 3 הטלות אפשריות של הקובייה השנייה כך שהסכום זוגי. לכן

$$.P(A) = \frac{6 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$$

בדומה

$$.P(B) = \frac{6 \cdot 2}{36} = \frac{1}{3}$$

לגבי החיתוך, רוצים שסכום הקוביות יתחלק ב-6, ופה לכל הטלה של קובייה אחת יש בדיוק תוצאה אחת של הקובייה השנייה כך שסכומן יתחלק ב-6. לכן

$$.P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$$

מכאן ש-A ו-B בלתי־תלויים.

עבור A ו-C, נחשב את $P(C)$: לכל הטלה למעט 4 של הקובייה הראשונה, יש הטלה אחת בלבד של הקובייה השנייה שסכומן יתחלק ב-5. לעומת זאת, להטלה 4 יש שתי אפשרויות כאלו. לכן

$$.P(C) = \frac{7}{36}$$

כעת $A \cap C$ הוא המאורע שסכום הקוביות מתחלק ב-10, כלומר הוא חייב להיות 10. לכן

$$.P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{36} = P(A) \cdot P(C)$$

תרגיל 3.25. במשפחה עם n ילדים, המאורע A הוא המאורע שבו יש לפחות בן אחד ובת אחת במשפחה, והמאורע B הוא שאין יותר מבת אחת. עבור $n = 2, 3, 4$, האם המאורעות האלו תלויים או בלתי־תלויים? (הניחו שההסתברויות להולדת בן ולהולדת בת שוות בכל לידה).

פתרון. נראה שאם $n = 2, 4$ המאורעות תלויים, ושאם $n = 3$ הם בלתי־תלויים.

א. נחשב את $P(A)$: המאורע המשלים של A הוא שאין בנים כלל או שאין בנות כלל. אלו מאורעות זרים, וכן ההסתברות שלא יהיו בנים כלל (או שלא יהיו בנות כלל) היא $\frac{1}{2^n}$. לכן $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

ב. נחשב את $P(B)$: B מורכב מאיחוד זר של "אין בנות כלל" ו"יש בת אחת". ההסתברות שלא יהיו בנות כלל היא $\frac{1}{2^n}$, וההסתברות שתהיה בת אחת היא $n \cdot \frac{1}{2^n}$ (יש n אפשרויות ללידה שבה נולדה הבת, והסיכוי שתיוולד בת בלידה הזו ובנים בשאר הלידות הוא $\frac{1}{2^n}$). לכן $P(B) = \frac{1}{2^n} + n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$.

ג. נחשב את $P(A \cap B)$: אם ידוע שיש לפחות בן אחד ובת אחת במשפחה, אבל גם אין יותר מבת אחת, בהכרח יש בת אחת במשפחה וכל שאר הילדים הם בנים. כפי שראינו, ההסתברות לזה היא $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$.

בסך הכל, המאורעות בלתי־תלויים אם ורק אם

$$.\frac{n}{2^n} = P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{n+1}{2^n}$$

אפשר קצת לפשט את המשוואה כדי להקל עלינו את ההצבה:

$$n \cdot 2^{n-1} = \left(2^{n-1} - 1\right) \cdot (n+1)$$
$$n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} - n + 2^{n-1} - 1$$

ולכן המאורעות הם בלתי־תלויים אם ורק אם $2^{n-1} - n - 1 = 0$. נציב:

- $n = 2$: $2^{n-1} - n - 1 = 2 - 2 - 1 = -1 \neq 0$, ולכן הם תלויים.
- $n = 3$: $2^{n-1} - n - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$, ולכן הם בלתי־תלויים.
- $n = 4$: $2^{n-1} - n - 1 = 8 - 4 - 1 = 3 \neq 0$, ולכן הם תלויים.

הגדרה 3.26. אומרים שמאורעות $A_1, \ldots, A_n$ הם **בלתי־תלויים במשותף**, אם מתקיים אחד משני התנאים השקולים הבאים:

א. לכל בחירה של $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$.

ב. לכל בחירה של $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, $P\left(B_1 \cap \cdots \cap B_n\right) = P\left(B_1\right) \cdots P\left(B_n\right)$.

3.6 תרגילים נוספים

תרגיל 3.27 (פרדוקס מונטי-הול)**.** אתם משתתפים בתוכנית הטלוויזיה "עז או מעז", שבו המנחה מציג בפניכם שלוש דלתות, שמאחורי אחת מהן מכונית החלומות שלכם ומאחורי השתיים האחרות עזים לא נחמדות במיוחד. אם תבחרו בדלת שמאחוריה המכונית, תזכו בה. לאחר שבחרתם דלת באופן אקראי, המנחה פותח את אחת הדלתות, מציג בפניכם את עז עצבנית, ומציע לכם להחליף את הדלת שבחרתם לדלת השנייה. האם תעדיפו להחליף?

פתרון. עדיף להחליף את הדלת. אפשר לבצע חישוב עם עץ, או לשים לב לעובדה הבאה: אם נחליף, אז נזכה במכונית אם ורק אם הדלת הראשונה שבחרנו לא הייתה המכונית, כלומר הסיכוי לזכות אם נחליף הוא $\frac{2}{3}$. לעומת זאת, אם לא נחליף, אז נזכה במכונית אם ורק אם הדלת הראשונה שבחרנו כן הייתה המכונית, כלומר הסיכוי לזכות אם לא נחליף הוא $\frac{1}{3}$.

תרגיל 3.28. המרווחים בין מערכות הבחירות בלה לה לנד הינם 3 חודשים בהסתברות $\frac{1}{2}$, 6 חודשים בהסתברות $\frac{1}{4}$ ושנה אחת בהסתברות $\frac{1}{4}$. הגשמים בלה לה לנד יורדים בימי חורף בהסתברות $\frac{1}{2}$, באביב ובסתיו בהסתברות $\frac{1}{5}$, ואילו בקיץ אין גשמים כלל. בלה לה לנד מתרחש שרב (מזג אוויר יבש וחם מאוד) בהסתברות של $\frac{1}{5}$ בחורף, בהסתברות של $\frac{1}{4}$ באביב ובסתיו ובהסתברות של $\frac{3}{10}$ בקיץ. הגשמים והשרב בלה לה לנד הינם מעיקים.

א. הבחירות הבאות נקבעו לאמצע החורף. מה ההסתברות שבבחירות שלפניהן ירד גשם?

ב. מה ההסתברות שיום הבחירות הבא יהיה נעים, אם הבחירות האחרונות היו בסתיו, והיה שרב?

פתרון.

א. ניעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned}
P(\text{ירד גשם}) &= P(\text{ירד גשם} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני 3 חודשים}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני 3 חודשים}) + \\
&+ P(\text{ירד גשם} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני 6 חודשים}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני 6 חודשים}) + \\
&+ P(\text{ירד גשם} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני שנה}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני שנה}) = \\
&= P(\text{ירד גשם בסתיו} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני 3 חודשים}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני 3 חודשים}) + \\
&+ P(\text{ירד גשם בקיץ} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני 6 חודשים}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני 6 חודשים}) + \\
&+ P(\text{ירד גשם בחורף} \mid \text{הבחירות הקודמות לפני שנה}) \cdot P(\text{הבחירות הקודמות לפני שנה}) = \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = 0.225.
\end{aligned}$$

ב. שימו לב שאין תלות בין מזג האוויר בעונות השונות. לכן הנתון שהיה שרב בבחירות האחרונות לא נותן לנו שום אינפורמציה על מזג האוויר בבחירות הבאות. לכן נחשב, שוב עם נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned}
P(\text{יהיה נעים} \mid \text{הבחירות האחרונות בסתיו והיה שרב}) &= P(\text{יהיה נעים} \mid \text{הבחירות הבאות בחורף}) \cdot P(\text{הבחירות הבאות בעוד 3 חודשים}) + \\
&+ P(\text{יהיה נעים} \mid \text{הבחירות הבאות באביב}) \cdot P(\text{הבחירות הבאות בעוד 6 חודשים}) + \\
&+ P(\text{יהיה נעים} \mid \text{הבחירות הבאות בסתיו}) \cdot P(\text{הבחירות הבאות בעוד שנה}) = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{40} = 0.425.
\end{aligned}$$

תרגיל 3.29. בכיתת קייטנה 20 בנים וכמות לא ידועה של בנות. 75% מהבנים לובשים מכנס קצר, ו-25% מהבנות לובשות מכנס קצר אף הן. בוחרים באקראי תלמיד, ואם מדובר בבת הלובשת מכנס קצר – היא הולכת הביתה (בהמשך יש סערה תקשורתית ומפטרים את מנהל הקייטנה). ידוע כי ההסתברות לתרחיש הזה בבחירת התלמיד האקראי הראשון היא 0.05.

א. האם בכיתת הקייטנה יש תלות בין המין של התלמיד לבין בחירתו ללבוש מכנסיים קצרות?

ב. כמה בנות יש בכיתה?

ג. מה ההסתברות שתלמיד הנבחר באקראי אינו לובש מכנס קצר?

ד. בקייטנה כולה יש 1000 ילדות, ובכל בוקר כל אחת מהן בוחרת באופן אקראי האם ללבוש מכנס קצר (בסיכוי p) או לא, באופן בלתי תלוי באחרות. לדנית יש שתי בנות בקייטנה, והיא קיבלה טלפון להגיע לקייטנה כיוון שלבנות אסור להגיע לקייטנה עם מכנס קצר. מה ההסתברות ששתי הבנות של דנית לובשות מכנס קצר ביום הזה?

פתרון.

א. יש תלות. אילו לא הייתה תלות, ההסתברות ללבישת מכנסיים קצרים לא הייתה משתנה אם מדובר בבן או בבת, אך לפי הנתונים אנו רואים שהיא כן שונה.

ב. נסמן את כמות הבנות בכיתה n. נסמן A = התלמיד שבוחרים הוא בן, B = התלמיד שנבחר לובש מכנס קצר. לפי הנתונים, $P(B \mid A) = 0.75$, $P(B \mid A^c) = 0.25$, $P(A) = \frac{20}{n+20}$, $P(A^c) = \frac{n}{n+20}$, $P(A^c \cap B) = 0.05$. לפי ההגדרה, $P(B \mid A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)}$, ולכן נקבל את המשוואה $0.25 = \frac{0.05}{\frac{n}{n+20}}$. נפתור ונקבל

$$0.25n = 0.05(n+20) = 0.05n + 1 \Longrightarrow 0.2n = 1 \Longrightarrow n = 5.$$

ג. רוצים לחשב את $P(B^c)$. ניעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - P(B \mid A) \cdot P(A) - P(B \mid A^c) \cdot P(A^c) = \\ = 1 - 0.75 \cdot 0.8 - 0.25 \cdot 0.2 = 0.35.$$

ד. כעת ידוע לנו שלפחות אחת משתי הילדות לובשת מכנס קצר, והשאלה היא מה ההסתברות ששתיהן לובשות מכנס קצר. מרחב המדגם שלנו הוא

$$\Omega = \{(\text{קצר}, \text{קצר}), (\text{קצר}, \text{ארוך}), (\text{ארוך}, \text{קצר}), (\text{ארוך}, \text{ארוך})\},$$

וההסתברות היא

$$P(\text{שתיהן לובשות קצר} \mid \text{לפחות אחת לובשת קצר}) = \frac{P(\{(\text{קצר}, \text{קצר})\})}{P(\{(\text{קצר}, \text{קצר}), (\text{קצר}, \text{ארוך}), (\text{ארוך}, \text{קצר})\})} = \\ = \frac{p^2}{p^2 + 2p(1-p)} = \frac{p}{p + 2(1-p)} = \frac{p}{2-p}.$$

תרגיל 3.30. התדירות של נשאות HIV באוכלוסיית ארה"ב הינה 0.0013. בגיוס לצבא האמריקני עושים שלושה סבבים של בדיקה מסוימת לנשאות. ה-TPR (rate positive true) של הבדיקה הינו 92%, וה-TNR (rate negative true) של הבדיקה הינו 99%, והדיוק בכל בדיקה בלתי־תלוי בדיוק של הבדיקות האחרות.

א. מה ההסתברות שאדם שקיבל תשובה חיובית בבדיקה הראשונה הינו נשא של HIV?

ב. מה ההסתברות שאדם שיצא חיובי גם בבדיקה השנייה הינו נשא של HIV?

ג. מה ההסתברות שאדם שאיננו נשא יקבל שלוש תשובות חיוביות?

פתרון. נסמן על ידי A את המאורע שהאדם הוא נשא, ועל ידי B_1, B_2, B_3 את המאורעות שיקבל תשובה חיובית בבדיקות המתאימות. לפי הנתון, $P(A) = 0.0013$, $P(B_i \mid A) = 0.92$, $P(B_i^c \mid A^c) = 0.99$.

א. נחשב:

$$P(A \mid B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \mid A) \cdot P(A)}{P(B_1 \mid A) \cdot P(A) + P(B_1 \mid A^c) \cdot P(A^c)} = \\ = \frac{\text{TPR} \cdot f}{\text{TPR} \cdot f + \text{TNR} \cdot (1-f)} = \\ = \frac{0.92 \cdot 0.0013}{0.92 \cdot 0.0013 + 0.01 \cdot 0.9987} = 0.10695$$

ב. בדומה,

$$P(A \mid B_1 \cap B_2) = \frac{P(A \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{P(B_1 \cap B_2 \mid A) \cdot P(A)}{P(B_1 \cap B_2 \mid A) \cdot P(A) + P(B_1 \cap B_2 \mid A^c) \cdot P(A^c)} = \\ = \frac{0.92^2 \cdot 0.0013}{0.92^2 \cdot 0.0013 + 0.01^2 \cdot 0.9987} = 0.91679$$

ג. כעת

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \mid A^c) = \frac{P(A^c \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(A^c)} = \frac{(1-f) \cdot (1-\text{TNR})^3}{1-f} = \\ = (1-\text{TNR})^3 = 0.01^3 = 10^{-6}$$

3.7 נושאים נוספים

3.7.1 קירוב סטירלינג

משפט 3.31 (קירוב סטירלינג)**.** ל-n גדול, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$. באופן פורמלי,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 .$$

תרגיל 3.32. אדם שיכור מתהלך לו על $\mathbb{Z}$. הבית שלו נמצא בנקודה 0, ובכל שנייה הוא זז צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה, בסיכוי שווה לכל צד ובלתי־תלוי בצעדים האחרים שלו (הוא הרי שיכור). מה הסיכוי שלאחר $2n$ צעדים הוא יהיה שוב בביתו? העריכו את הסיכוי עבור n גדול.

פתרון. מרחב המדגם הוא $\Omega = \{\pm 1\}^{2n}$, והמאורע שלנו הוא

$$A = \{(a_1, \ldots, a_{2n}) \in \Omega \mid a_1 + \cdots + a_{2n} = 0\}.$$

$|\Omega| = 2^{2n} = 4^n$, ולגבי הגודל של A: צריך לבחור n צעדים מתוך ה-$2n$ שיהיו $+1$ והאחרים יהיו -1, בלי החזרה ובלי חשיבות לסדר. לכן $|A| = \binom{2n}{n}$. בסך הכל

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{1}{4^n}\cdot\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{1}{4^n}\cdot\frac{\sqrt{4\pi n}\cdot\frac{2^{2n}n^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n\cdot\frac{n^{2n}}{e^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3.7.2 פרדוקס יום ההולדת

בעיה 3.33. נניח ש-m אנשים אקראיים נמצאים בחדר. מה הסיכוי שלשניים מהם יהיה יום הולדת באותו היום והחודש (בלי שנה)?

חישוב ישיר ייתן

$$P\left(\substack{\text{אין שניים עם אותו}\\\text{יום הולדת}}\right) = 1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{365}\right).$$

כדי להעריך את הסיכוי, נשתמש בחסם $1 - x < e^{-x}$ לכל $x > 0$, ונקבל

$$\begin{aligned} P\left(\substack{\text{אין שניים עם אותו}\\\text{יום הולדת}}\right) = 1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{365}\right) &< \\ < e^{-\frac{1}{365}}\cdot e^{-\frac{2}{365}}\cdots e^{-\frac{m-1}{365}} &= \\ = e^{-\frac{1}{365}(1+2+\cdots+(m-1))} = e^{-\frac{m(m-1)}{2\cdot 365}} & \end{aligned}$$

אם ניקח $m = 23$ נקבל

$$P\left(\substack{\text{אין שניים עם אותו}\\\text{יום הולדת מבין 23}}\right) < 0.49999.$$

באופן כללי, אם יש m אנשים שצריכים לבחור כל אחד מבין אותן n אפשרויות, נצפה לראות אנשים שבוחרים את אותה הבחירה כאשר $m \approx \sqrt{2n}$.

4 משתנים מקריים בדידים

4.1 משתנים מקריים

המטרה. להיות מסוגלים "לכמת" את אוסף כל התוצאות של ניסוי מסוים. במקום להסתכל כל פעם על כל תוצאה בנפרד כמאורע ("האם יצא 1 בהטלת קוביה", "האם יצא 2 בהטלת קוביה", ...), נרצה להסתכל על אובייקט אחד שירכז לנו את כל המידע שמעניין אותנו מהניסוי.

הגדרה 4.1. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות. **משתנה מקרי על** Ω (**variable random**) הוא פונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

דוגמה 4.2.

א. הטלת מטבע: $\Omega = \{\text{פלי}, \text{עץ}\}$ אפשר לייצג על ידי משתנה מקרי $X(\text{עץ}) = 0$ ו- $X(\text{פלי}) = 1$.

ב. הטלת קוביה: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ אפשר לייצג על ידי $X(\omega) = \omega$.

ג. הטלת שני מטבעות: $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. פה השאלה תהיה מה אנחנו רוצים למדוד. אפשר למשל להגדיר את המשתנה המקרי $X(a,b) = a + b$ שיספור כמה פעמים יצא "פלי" בהטלה; אפשר מצד שני להגדיר את המשתנה המקרי $X(a,b) = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$ שימדוד האם שתי ההטלות זהות זו לזו.

דוגמה 4.3. נסתכל על הטלה של שתי קוביות $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. נגדיר את המשתנה המקרי $X(a,b) = a + b$ המייצג את סכום ההטלות. אז

$$X(1,2) = 3, \qquad X(3,6) = 9.$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} X^{-1}(3) &= \{(1,2), (2,1)\} \\ X^{-1}((-\infty, 3]) &= \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \\ X^{-1}((-8, 14)) &= \{(a,b) \in \Omega \mid -8 < a + b < 14\} = \Omega \\ X^{-1}((-\infty, 1]) &= \varnothing \end{aligned}$$

4.2 פונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי

הגדרה 4.4. יהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי. **פונקציית ההתפלגות של** X היא הפונקציה $a \mapsto P(X = a)$. שימו לב שהסימון $X = a$ הוא מבחינתנו קיצור למאורע

$$\{X = a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא הפונקציה $a \mapsto P(X \leq a)$.

דוגמה 4.5.

א. פונקציית ההתפלגות של הטלת קוביה: $P(X = k) = \frac{1}{6}$ לכל $1 \leq k \leq 6$.

ב. פונקציית ההתפלגות של סכום הטלות שתי קוביות: $P(X=2)=\frac{1}{36}$, $P(X=3)=\frac{2}{36}$ וכן הלאה. באופן כללי, לכל $2\leq k\leq 12$ מתקיים

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{k-1}{36}, & k\leq 7\\ \frac{13-k}{36}, & k>7\end{cases}.$$

תרגיל 4.6. נסתכל על הטלת שלושה מטבעות $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),\dots\}$. $|\Omega|=8$. נגדיר את המשתנה המקרי X הסופר כמה פעמים יצא 1, ו-Y כמה פעמים יצא 0.

א. מהי $P(X=2)$?

ב. מהי $P(X<2)$?

ג. האם X ו-Y שווים?

ד. האם X ו-Y שווי התפלגות?

ה. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ושל Y?

פתרון.

א. $P(X=2)=P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\})=\frac{3}{8}$.

ב. $P(X<2)=P(\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})=\frac{1}{2}$.

ג. המשתנים אינם שווים כי אפשר למצוא מאורעות שהם ייתנו ערכים שונים בהם. למשל, ניקח את התוצאה $\omega=(1,1,1)$. אז $X(\omega)=3$ אבל $Y(\omega)=0$.

ד. כן. פונקציית ההתפלגות שלהם היא

$$P(X=a)=P(Y=a)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & a=0,3\\ \frac{3}{8}, & a=1,2\end{cases}.$$

ה. פונקציית ההתפלגות המצטברת היא

$$P(X\leq a)=P(Y\leq a)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & a=0\\ \frac{1}{2}, & a=1\\ \frac{7}{8}, & a=2\\ 1, & a=3\end{cases}$$

המסר של התרגיל האחרון: יכולים להיות משתנים מקריים על אותו מרחב מדגם, או על מרחבי מדגם שונים, שיהיו שונים זה מזה אבל בעלי אותה התפלגות. כאשר אנחנו באים ללמוד את המשתנה המקרי, בהרבה מקרים כל מה שיעניין אותנו הוא ההתפלגות שלו – אפשר יהיה לשכוח ממרחב המדגם, ורק לשאול את עצמנו מה ההתפלגות של המשתנה המקרי.

תרגיל 4.7. כד מכיל שמונה כדורים, מהם שלושה אדומים וחמישה כחולים. מוציאים מהכד כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. נגדיר משתנה מקרי X הסופר את מספר הכדורים האדומים שמוציאים עד שיוצא כדור כחול. מצאו את פונקציית ההתפלגות של X ואת פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

פתרון. נשים לב שהערכים ש-X יכול לקבל הם $0,1,2,3$. נכתוב את התשובה בטבלה:

a	0	1	2	3
$P(X=a)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$
$P(X\leq a)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{50}{56}$	$\frac{55}{56}$	1

תרגיל 4.8. משתנה מקרי X מקבל את הערכים $0,1,2,3,\ldots$ בהסתברות $P(X=i)=\frac{c}{3^i}$.

א. מצאו את c.

ב. מצאו את $P(X>5)$.

ג. מצאו את $P(X$ זוגי$)$.

פתרון.

א. נשים לב כי $\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=1$. מפה נקבל את המשוואה

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c}{3^i}=c\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3c}{2}$$

ולכן $c=\frac{2}{3}$.

ב. מחישוב ישיר,

$$P(X>5)=\sum_{i=6}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^i}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^6}.$$

ג. נחשב:

$$P(X\text{ זוגי})=\sum_{i=0}^{\infty}P(X=2i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2i}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3}{4}.$$

תרגיל 4.9. מתוך קבוצה של 100 נבדקים שמתוכם 10 חולים בוחרים באקראי 10 אנשים ובודקים אותם. יהי X המשתנה המקרי המתאר את מספר החולים מתוך ה-10 שנבדקו.

א. תארו את מרחב המדגם ואת ההתפלגות של X.

ב. מהו הערך השכיח ביותר ש-X מקבל?

פתרון.

א. מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל הקבוצות מגודל 10 של קבוצת הנבדקים. לכן $|\Omega|=\binom{100}{10}$. פונקציית ההתפלגות של X היא

$$P(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\cdot\binom{90}{10-k}}{\binom{100}{10}}.$$

ב. כדי לחשב את הערך השכיח ביותר, נחשב את המנות $q_k = \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$:

$$q_k = \frac{\frac{\binom{10}{k+1}\cdot\binom{90}{10-k-1}}{\binom{100}{10}}}{\frac{\binom{10}{k}\cdot\binom{90}{10-k}}{\binom{100}{10}}} = \frac{\binom{10}{k+1}\cdot\binom{90}{10-k-1}}{\binom{10}{k}\cdot\binom{90}{10-k}} = \frac{\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}\cdot\frac{90!}{(9-k)!(81+k)!}}{\frac{10!}{k!(10-k)!}\cdot\frac{90!}{(10-k)!(80+k)!}} =$$
$$= \frac{k!}{(k+1)!}\cdot\frac{(10-k)!}{(9-k)!}\cdot\frac{(10-k)!}{(9-k)!}\cdot\frac{(80+k)!}{(81+k)!} =$$
$$= \frac{(10-k)^2}{(k+1)(81+k)} = \frac{100-20k+k^2}{81+82k+k^2}$$

לכן $q_k > 1$ אם ורק אם $100-20k+k^2 > 81+82k+k^2$, אם ורק אם $19 > 102k$, שקורה אם ורק אם $k = 0$. לכן הערך השכיח ביותר הוא 1.

4.3 התפלגויות נפוצות, חלק 1

הגדרה 4.10. התפלגות אחידה בדידה – משתנה מקרי X המקבל ערכים מקבוצה סופית S, כאשר לכל ערך יש סיכוי זהה להתקבל. לרוב הקבוצה S היא קבוצת מספרים שלמים עוקבים $\{a, a+1, \ldots, b\}$, ואז מסמנים $X \sim U[a,b]$. פונקציית ההתפלגות של X היא

$$P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

לכל $k \in \{a, a+1, \ldots, b\}$.

תרגיל 4.11. יהי X משתנה מקרי אחיד על הקבוצה $\{4, 5, \ldots, 49\}$.

א. מה הסיכוי ש-X יקבל את הערך 17?

ב. מה הסיכוי שהערך של X יתחלק ב-5?

פתרון.

א. בקבוצה הזו יש $49-4+1 = 46$ איברים, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{46}$.

ב. הערכים בקבוצה שמתחלקים ב-5 הם $\{5, 10, \ldots, 45\}$. בסך הכל יש 9 ערכים כאלה, ולכן הסיכוי ש-X יתחלק ב-5 הוא $\frac{9}{46}$.

הגדרה 4.12. יהי A מאורע. **משתנה האינדיקטור של** A, מסומן $X = 1_A$, הוא המשתנה הבא:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

זאת אומרת שהוא בדיוק מייצג את המאורע A – שואל האם התוצאה שלנו ממרחב המדגם נמצאת בתוך המאורע או לו.

איך נראית פונקציית ההתפלגות של משתנה אינדיקטור?

$$P(1_A = a) = \begin{cases} P(A^c), & a = 0 \\ P(A), & a = 1 \end{cases}.$$

שימו לב שכל משתני האינדיקטור שעבורם $P(A)=p$ לאיזשהו p קבוע הם שווי התפלגות. אז אם אנחנו רוצים ללמוד את התכונות שלהם, מספיק יהיה לנו ללמוד את התכונות של ההתפלגות שלהם.

הגדרה 4.13. התפלגות ברנולי – משתנה מקרי X המקבל שני ערכים: 0 או 1 (כישלון או הצלחה). מסמנים $X\sim \mathrm{Ber}(p)$ או $X\sim \mathrm{b}(p)$, כאשר p היא ההסתברות לקבל את הערך 1 (הסתברות ההצלחה בניסוי).

תרגיל 4.14. נתון מרחב מדגם ובו שני מאורעות A ו-B. נסתכל על המשתנים המקריים 1_A ו-1_B. הוכיחו ש-$1_A1_B\sim \mathrm{Ber}(p)$ כאשר $p=P(A)P(B)$ אם ורק אם A ו-B בלתי־תלויים.

הוכחה. נשים לב כי המשתנה 1_A1_B מקבל גם הוא רק שתי אפשרויות לערכים – 0 ו-1. לכן הוא צריך להיות משתנה ברנולי. של איזה מאורע?

$$(1_A1_B)(\omega)=1 \iff 1_A(\omega)1_B(\omega)=1 \iff 1_A(\omega)=1_B(\omega)=1 \iff \omega\in A\cap B.$$

לכן $1_A1_B=1_{A\cap B}$. מכאן שההתפלגות שלו היא $1_A1_B\sim \mathrm{Ber}(P(A\cap B))$, וההסתברות הזו שווה ל-$P(A)P(B)$ אם ורק אם A ו-B בלתי־תלויים. □

תרגיל 4.15. שחקן זורק לסל 4 פעמים, ובכל זריקה ההסתברות שלו לקלוע היא 0.6 (באופן בלתי־תלוי בזריקות האחרות).

א. מה ההסתברות שלו לקלוע לסל לפחות פעם אחת?

ב. מה ההסתברות לקלוע לכל היותר 3 פעמים?

פתרון. נגדיר X המשתנה המקרי של פספוס לסל בזריקה כלשהי. לכן $X\sim \mathrm{Ber}(0.4)$.

א. המשלים של המאורע הוא שנפספס בכל ארבע הפעמים, ולכן הסיכוי של קליעה לסל לפחות פעם אחת היא

$$1-P(X=1)^4=1-0.4^4=1-0.0256=0.9744.$$

ב. המשלים של המאורע הוא שנקלע בכל הפעמים, ולכן הסיכוי שנקלע לכל היותר 3 פעמים היא

$$1-P(X=0)^4=1-0.6^4=1-0.1296=0.8704.$$

מה לגבי הסתברויות מורכבות יותר, כמו ההסתברות לקלוע לסל בדיוק פעמיים? עליהן נלמד בהמשך.

4.4 התפלגות משותפת

הגדרה 4.16. יהיו X ו-Y משתנים מקריים. נגדיר את **פונקציית ההתפלגות המשותפת** שלהם להיות

$$P_{X,Y}(a,b)=P(X=a,Y=b).$$

ההתפלגויות של X ושל Y נקראות **ההתפלגויות השוליות**.

דוגמה 4.17. מטילים שתי קוביות סטנדרטיות. נסמן על ידי X ו-Y את המשתנה המקרי המתאים לכל קוביה. ההתפלגות המשותפת היא

$$P_{X,Y}(a,b) = \frac{1}{36}$$

לכל $1 \leq a,b \leq 6$ טבעיים. ההתפלגות השולית של X היא $P_X(a) = P(X=a) = \frac{1}{6}$, וכנ"ל ההתפלגות של Y.

הגדרה 4.18. אומרים ש-X ו-Y הם **בלתי־תלויים**, אם לכל a ו-b מתקיים

$$P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b).$$

כלומר, לכל a,b, המאורעות $\{X=a\}$ ו-$\{Y=b\}$ הם בלתי־תלויים.

תרגיל 4.19. בכד יש 5 כדורים לבנים ו-10 כדורים אדומים. מטילים מטבע פעמיים, ולפי כמות הפעמים שיצא "עץ" שולפים את אותה כמות כדורים. נסמן על ידי X את מספר העצים שיצאו, ועל ידי Y את מספר הכדורים הלבנים שנשלפו.

א. מהי ההתפלגות המשותפת של X ו-Y?

ב. מהן ההתפלגויות השוליות של X ושל Y?

ג. האם X ו-Y תלויים?

ד. חשבו את $P(1 \leq X \leq 2, 1 \leq Y \leq 2)$.

ה. מהי $P(X=1 \mid Y=1)$?

ו. מהי $P(X>Y)$?

פתרון. הכי קל בשאלות כאלו הוא להשתמש בטבלה.

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_Y(b)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{28}$	$\frac{29}{42}$
1	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{14}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}\right)=\frac{5}{42}$	$\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$
2	0	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{14}=\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
$P_X(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

לכן:

א. בטבלה.

ב. בטבלה.

ג. כן! שהרי $P(X=0,Y=0) = \frac{1}{4} \neq \frac{29}{42}\cdot\frac{1}{4} = P(X=0)\cdot P(Y=0)$.

ד. $P(1 \leq X \leq 2, 1 \leq Y \leq 2) = \sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2} P(X=a,Y=b) = \frac{13}{42}$.

ה. $P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{12}$

ו. נחשב:

$$P(X>Y)=\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=0}^{a-1}P(X=a,Y=b)=$$
$$=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{47}{84}$$

תרגיל 4.20. מגרילים n ביטים באקראי באופן בלתי־תלוי. יהי X המשתנה המקרי הסופר את מספר המופעים של 01 במחרוזת שהתקבלה, ו-Y מספר המופעים של 10 במחרוזת שהתקבלה. בדקו האם X,Y תלויים או בלתי־תלויים עבור $n=2,3,4$.

פתרון. עבור $n=2$, המשתנים X ו-Y יכולים לקבל את הערכים $0,1$.

$$P(X=0,Y=0)=P(\{00,11\})=\frac{1}{2}$$
$$P(X=0)\cdot P(Y=0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

ולכן יש תלות.

עבור $n=3$, נרשום את כל המחרוזות בטבלה ונראה מהם הערכים של X ושל Y:

	000	001	010	011	100	101	110	111
X	0	1	1	1	0	1	0	0
Y	0	0	1	0	1	1	1	0

לכן אפשר לכתוב את טבלת ההתפלגות המשותפת:

$Y\backslash X$	0	1	$P_Y(b)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P_X(a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

מפה אפשר לראות שהם בלתי־תלויים.

עבור $n=4$, שוב יש תלות. אכן, $P(X=2,Y=2)=0\neq P(X=2)\cdot P(Y=2)$.

4.5 התוחלת של משתנה מקרי

המטרה. למצוא את ה"ממוצע" של ההתפלגות. היינו לוקחים את הממוצע של הערכים של המשתנה המקרי, אבל מן הסתם נרצה להתחשב גם בהסתברויות שלו – אם משתנה מקרי מקבל את הערך 0 בהסתברות 0.99 ואת הערך 10000 בהסתברות 0.01, לא היינו רוצים שהממוצע יהיה 5000, שהרי הרבה יותר סביר לקבל 0.

הגדרה 4.21. יהי X משתנה מקרי. **התוחלת** של X הינה

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{a}a\cdot P(X=a).$$

דוגמה 4.22.

א. נניח ש-X הוא הטלת קוביה, כלומר X מתפלג אחיד על $\{1,\ldots,6\}$. אז $\mathbb{E}[X] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$.

ב. באופן כללי, אם X מתפלג אחיד על פני המספרים $a, a+1, \ldots, b$, אז התוחלת היא הממוצע של המספרים – $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.

ג. נניח ש-$X \sim \mathrm{Ber}(p)$ הוא משתנה ברנולי. מה התוחלת של X?

$$\mathbb{E}[X] = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p.$$

תרגיל 4.23. בחברת "מעסיקים בזול מוכרים ביוקר" ישנם 100 עובדים. מתוכם המנכ"ל מרוויח $1,000,000$ ש"ח בשנה, 9 המנהלים הבכירים מרוויחים $10,000$ ש"ח בשנה, והעובדים הזוטרים מרוויחים 10 ש"ח בשנה (בושה וחרפה).

א. מהו השכר הממוצע בחברה?

ב. מהו השכר החציוני בחברה?

פתרון. יהי X המשתנה המקרי של הרווח של עובד אקראי בחברה.

א. $P(X = 1,000,000) = \frac{1}{100}$, $P(X = 10,000) = \frac{9}{100}$, $P(X = 10) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$. לכן

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100}\cdot 1,000,000 + \frac{9}{100}\cdot 10,000 + \frac{9}{10}\cdot 10 = 10909$$

ב. חציון של קבוצת ערכים $a_1,\ldots,a_n$ מוגדר בתור המספר האמצעי בסדרה אם היינו מסדרים אותה בסדר עולה, כולל חזרות (אם היא באורך זוגי – הממוצע בין השניים שבאמצע). במקרה הזה כמעט כל הערכים הם 10, ולכן גם השכר החציוני הוא 10 ש"ח בשנה.

טענה 4.24. יהיו X, Y משתנים מקריים.

א. אדיטיביות התוחלת: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$, גם כאשר הם תלויים!

ב. אם a סקלר, אז $\mathbb{E}[aX] = a\cdot\mathbb{E}[X]$.

תרגיל 4.25. שי, רון ואיתי משחקים במשחק הבא: בכל תור,

- שי מטיל מטבע מוטה שהסיכוי שלו לצאת "פלי" הוא 0.6. אם אכן יוצא "פלי" הוא מקבל שלושה שקלים.
- רון מקבל שני שקלים באופן קבוע.
- איתי מקבל ארבעה שקלים; הוא מטיל מטבע דומה לזה של שי, ואם יוצא "פלי" הוא נאלץ להחזיר שלושה שקלים.

בכל תור, המנצח הוא מי שהרוויח הכי הרבה (באותו תור).
חשבו את הסיכוי שכל אחד מנצח את השני. בהנחה שמשחקים הרבה תורות, מי ירוויח הכי הרבה?

פתרון. נכתוב את התפלגויות הרווח של כל שחקן:

$$.S \sim 3 \cdot \mathrm{Ber}\left(0.6\right), \qquad R \sim 2, \qquad I \sim 4 - 3 \cdot \mathrm{Ber}\left(0.6\right)$$

נשווה את זוגות השחקנים:

$$P\left(S > R\right) = P\left(3 \cdot \mathrm{Ber}\left(0.6\right) > 2\right) = P\left(\mathrm{Ber}\left(0.6\right) = 1\right) = 0.6$$

$$P\left(R > I\right) = P\left(2 > 4 - 3 \cdot \mathrm{Ber}\left(0.6\right)\right) = P\left(\mathrm{Ber}\left(0.6\right) > \frac{2}{3}\right) = P\left(\mathrm{Ber}\left(0.6\right) = 1\right) = 0.6$$

לכן במרבית התורות שי מנצח את רון, ורון מנצח את איתי. מה לגבי שי ואיתי? נכתוב את כל המאורעות בטבלה:

המטבע של שי / המטבע של איתי	עץ	פלי
עץ	$S = 0, I = 4$ – איתי מנצח	$S = 0, I = 1$ – איתי מנצח
פלי	$S = 3, I = 4$ – איתי מנצח	$S = 3, I = 1$ – שי מנצח

לכן $P\left(S > I\right) = P\left(\text{פלי, פלי}\right) = 0.6^2 = 0.36$. כלומר, במרבית התורות שי מנצח את רון, במרבית התורות רון מנצח את איתי, ובמרבית התורות איתי מנצח את שי!

כדי להבין מי השחקן הרווחי ביותר לאורך מספר תורות רב, נחשב את התוחלת:

$$.\mathbb{E}\left[S\right] = 3 \cdot 0.6 = 1.8, \qquad \mathbb{E}\left[R\right] = 2, \qquad \mathbb{E}\left[I\right] = 4 - 3 \cdot 0.6 = 2.2$$

כלומר איתי הוא השחקן הרווחי ביותר (וזאת על אף שבמרבית התורות רון מנצח אותו).

תרגיל 4.26. בעיר מסוימת ב-80% מבתי האב יש 2 ילדים, ואילו ב-20% מבתי האב יש 8 ילדים.

א. מה תוחלת מספר הילדים בבתי אב בעיר?

ב. בוחרים ילד באקראי ושואלים אותו כמה אחים יש לו. מה תוחלת מספר האחים עבור ילדי העיר?

פתרון.

א. נסמן על ידי X את מספר הילדים בבית אב. אז $P\left(X = 2\right) = 0.8$ ו-$P\left(X = 8\right) = 0.2$, ולכן

$$.\mathbb{E}\left[X\right] = 2 \cdot 0.8 + 8 \cdot 0.2 = 3.2$$

ב. רציתם להגיד 2.2? וואלה באסה.
נסמן על ידי Y את כמות האחים של ילד אקראי בעיר. ברור שהערכים של Y הם 1 או 7. אבל ההסתברויות הולכות להשתנות, כי עכשיו הסיכוי לבחור ילד מתוך בית אב עם 8 ילדים גדול יותר מאשר הסיכוי לבחור רק את בית האב הזה. נניח שיש n בתי אב בסך הכל בעיר. אז יש $8 \cdot 0.2n = 1.6n$ ילדים מבית אב עם 8 ילדים, ו-$2 \cdot 0.8n = 1.6n$ ילדים מבית אב עם 2 ילדים. כלומר:

$$P\left(\text{ילד אקראי הוא מבית אב עם 2 ילדים}\right) = P\left(\text{ילד אקראי הוא מבית אב עם 8 ילדים}\right) = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$.P\left(Y = 1\right) = P\left(Y = 7\right) = \frac{1}{2}$$

כלומר $\mathbb{E}\left[Y\right] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

תרגיל 4.27. הפקיד המבולבל הכניס n מכתבים ל-n תיבות דואר באקראי (אחד לכל תיבה). מה תוחלת מספר המכתבים שנכנסו, במקרה, לתיבת הדואר המיועדת להם?

פתרון. יהי I_i משתנה האינדיקטור של המאורע "המכתב ה-i נכנס לתיבת הדואר המתאימה לו". אז $X = I_1 + \cdots + I_n$ מייצג את כמות המכתבים שנכנסו לתיבת הדואר המתאימה להם. נשים לב שלכל מכתב בפני עצמו, הסיכוי שהוא נכנס לתיבת הדואר הנכונה הוא $\frac{1}{n}$, ולכן $I_i \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$. לכן

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

שימו לב: המשתנים $I_1, \ldots, I_n$ תלויים זה בזה, כי אם אחד מהם לא נכנס למקום הנכון אז יש עוד (לפחות) מכתב אחד שנכנס לתיבה הלא נכונה. ובכל זאת, התוחלת אדיטיבית.

4.6 השונות

התוחלת נותנת לנו מידע על ה"מרכז" של ההתפלגות שלנו. לעומת זאת, אם נרצה להבין גם כמה ההתפלגות שלנו "מפוזרת", נרצה מדד נוסף.

הגדרה 4.28. יהי X משתנה מקרי. **השונות** של X הינה

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2.$$

סטיית התקן של X הינה

$$\text{std}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

איך מחשבים את השונות? לכל פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{a} f(a) P(X = a).$$

בפרט אפשר לקחת $f(x) = x^2$ ולקבל

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{a} a^2 \cdot P(X = a).$$

אז מחשבים את $\mathbb{E}[X]$ ואת $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ לפי הנוסחאות האלו, ואז מחשבים את השונות מההגדרה.

טענה 4.29. יהיו X, Y משתנים מקריים.

א. $\text{Var}(X) \geq 0$. יותר מזה, $\text{Var}(X) = 0$ אם ורק אם X קבוע. כלומר אם המשתנה שלנו לא קבוע, השונות (ולכן גם סטיית התקן) חיוביים!

ב. $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

ג. אם X, Y בלתי־תלויים, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

תרגיל 4.30. יהי X משתנה מקרי המקיים

$$P(X = 0) = 0.4, \qquad P(X = 1) = 0.3, \qquad P(X = 2) = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.1.$$

א. חשבו את התוחלת ואת השונות של X.

ב. נגדיר $Y = 5X - 13$ ו-$Z = (X-2)^2$. חשבו את התוחלת ואת השונות של Y ו-Z.

ג. חשבו את התוחלת ואת השונות של $L = \frac{3}{X-3}$.

פתרון.

א. נחשב ישירות:

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1$$
$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.1 = 2$$

לכן $\mathrm{Var}(X) = 1$.

ב. עבור Y זה קל:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[5X - 13] = 5\mathbb{E}[X] - 13 = 5 - 13 = -8$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(5X - 13) = 5^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 25$$

עבור Z עדיף לחשב ישירות: ההתפלגות שלו היא

$$P(Z = 0) = P(X = 2) = 0.2$$
$$P(Z = 1) = P(X \in \{1, 3\}) = 0.4$$
$$P(Z = 4) = P(X = 0) = 0.4$$

לכן

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.4 = 2$$
$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.4 + 4^2 \cdot 0.4 = 6.8$$

ומכאן $\mathrm{Var}(Z) = 4.8$.

ג. L אינו משתנה מקרי, כי הוא אינו מוגדר לכל המרחב.

4.7 השונות המשותפת ומקדם המתאם של פירסון

כעת, אם יש לנו שני משתנים מקריים, המטרה שלנו תהיה ללמוד את הקשר ביניהם.

הגדרה 4.31. יהיו X ו-Y משתנים מקריים. **השונות המשותפת** של X ו-Y היא

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

אם $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, אומרים ש-X ו-Y **בלתי־מתואמים**.

טענה 4.32. יהיו X, Y, Z משתנים מקריים.

א. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.

ב. $\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z)$. בדומה ברכיב השני, בגלל:

ג. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.

ד. אם X ו-Y בלתי־תלויים, אז הם בלתי־מתואמים.

ה. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$. בפרט, אם הם בלתי־מתואמים, השונות אדיטיבית.

דוגמה 4.33. נתבונן במשתנה המקרי X המוגדר לפי

$$P(X=-1) = \frac{1}{4}, \qquad P(X=0) = \frac{1}{2}, \qquad P(X=1) = \frac{1}{4}$$

ובמשתנה המקרי $Y = |X|$.
ראשית, X ו-Y תלויים, שהרי $P(X=0,Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{2}$, לעומת $P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. מצד שני, נראה שהם בלתי־מתואמים:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$$
$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\cdot|X|] = \frac{1}{4}\cdot((-1)\cdot 1) + \frac{1}{2}\cdot(0\cdot 0) + \frac{1}{4}\cdot(1\cdot 1) = 0$$

לכן $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0 - 0\cdot\mathbb{E}[Y] = 0$.

הגדרה 4.34. יהיו X ו-Y משתנים מקריים. **מקדם המתאם של פירסון** של X ו-Y מוגדר להיות

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

טענה 4.35. יהיו X ו-Y משתנים מקריים.

א. $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

ב. $\rho(X,Y) = 0$ אם ורק אם X ו-Y בלתי־מתואמים.

ג. $\rho(X,Y) = 1$ אם ורק אם $Y = aX+b$ עבור $a>0$.

ד. $\rho(X,Y) = -1$ אם ורק אם $Y = aX+b$ עבור $a<0$.

כפי שרואים מהטענה, מקדם המתאם עוזר לנו למדוד קשרים לינאריים בין משתנים מקריים. העובדה שיש משתנים מקריים בלתי־מתואמים שהם לא בלתי־תלויים מראה לנו שמקדם המתאם יודע לראות קשרים לינאריים, אבל עשוי לפספס קשרים סטטיסטיים (כמו תלות יותר מורכבת). ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס, כך גם הקשר הלינארי בין המשתנים חלש יותר.

4.8 התפלגויות נפוצות, חלק 2

(תזכורת על אחידה ועל ברנולי, התוחלת והשונות של כל אחת מהן)

הגדרה 4.36. התפלגות בינומית – מבצעים סדרה של n ניסויים זהים ובלתי־תלויים עם הסתברות הצלחה p, וסופרים את כמות ההצלחות שלהם. מסמנים $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ אז פונקציית ההתפלגות היא

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לכל $k \in \{0, \ldots, n\}$.

באופן שקול: יש לנו n משתני ברנולי בלתי־תלויים עם סיכוי הצלחה p, ומסתכלים על ההתפלגות של הסכום שלהם.

טענה 4.37. אם $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ אז $\mathbb{E}[X] = np$ ו-$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

תרגיל 4.38. מתוך סקר שנערך בין תושבי עיר מסוימת התברר כי 45% מהתושבים היו בעד פתיחת הקניון בעיר, 30% נגד ול-25% אין דעה בעניין. בוחרים באקראי ארבעה אנשים מתושבי העיר. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. ארבעתם בעד פתיחת הקניון.

ב. שלפחות אחד יהיה נגד הפתיחה.

ג. שלארבעתם תהיה דעה מסוימת.

ד. שלפחות לאחד מהם לא תהיה דעה בנדון.

פתרון.

א. תהי X כמות האנשים שבעד. אז $X \sim \mathrm{Bin}(4, 0.45)$, ולכן

$$P(X=4) = \binom{4}{4} 0.45^4 = 0.041.$$

ב. תהי Y כמות האנשים שנגד. אז $Y \sim \mathrm{Bin}(4, 0.3)$, ולכן

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{4}{0} 0.7^4 = 0.7599.$$

ג. תהי Z כמות האנשים עם דעה. אז $Z \sim \mathrm{Bin}(4, 0.75)$, ולכן

$$P(Z=4) = \binom{4}{4} 0.75^4 = 0.316.$$

ד. תהי W כמות האנשים בלי דעה. אז $W \sim \mathrm{Bin}(4, 0.25)$, ולכן

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W=0) = 1 - \binom{4}{0} 0.75^4 = 0.6836.$$

תרגיל 4.39. משחקים במשחק הבא: מטילים n מטבעות. את אלו שנפלו על "עץ" שומרים, ואת היתר מחזירים לקופה. מטילים את אלה ששמרנו שוב, והפעם שומרים רק את אלו שנפלו על "פלי" (ואת היתר מחזירים). כיצד מתפלג מספר המטבעות שבידינו בסוף המשחק?

פתרון. אילו עצרנו אחרי השלב הראשון, המספר הזה היה מתפלג $\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. נרצה לומר שאחרי שני השלבים המספר מתפלג $\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{4}\right)$. אכן, נדמיין שאנחנו זורקים כל מטבע פעמיים, גם את אלו שנפלו בהתחלה על "פלי", ושומרים רק את אלו שיצאו בהתחלה "עץ" ואחר כך "פלי". ברור שמספר המטבעות שבידינו זהה לניסוי הזה. כעת אנחנו מבצעים ניסוי n פעמים (הטלת מטבע) שסיכוי הצלחתו הוא $\frac{1}{4}$, ולכן התשובה היא אכן $\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

תרגיל 4.40. כיתה מחולקת לשלוש קבוצות, ובכל קבוצה שלושה תלמידים. כל תלמיד בוחר אם הוא מעדיף ללמוד מתמטיקה (בהסתברות p) או פיזיקה (בהסתברות $1-p$). כל קבוצה בוחרת את נושא הלימוד המועדף עליה על פי רוב, והכיתה בוחרת את נושא הלימוד לפי מה שרוב קבוצות הלמידה החליטו.

מה ההסתברות שהכיתה תלמד מתמטיקה? העריכו את ההסתברות כפונקציה של $p=\frac{1+\varepsilon}{2}$ כאשר $\varepsilon>0$ קטן מאוד.

פתרון. ההסתברות של קבוצה לבחור במתמטיקה היא

$$P\left(\mathrm{Bin}\left(3,p\right)\geq 2\right)=3p^2\left(1-p\right)+p^3=3p^2-2p^3=p^2\left(3-2p\right).$$

לכן ההסתברות של הכיתה לבחור במתמטיקה היא

$$P\left(\mathrm{Bin}\left(3,p^2\left(3-2p\right)\right)\geq 2\right)=\left(p^2\left(3-2p\right)\right)^2\left(3-2p^2\left(3-2p\right)\right).$$

כאשר $p=\frac{1+\varepsilon}{2}$, אפשר לקרב $p^2\approx\frac{1+2\varepsilon}{4}$ (מזניחים חזקות גבוהות של ε), ואז

$$p^2\left(3-2p\right)\approx\frac{1+2\varepsilon}{4}\left(2-\varepsilon\right)\approx\frac{2+3\varepsilon}{4}=\frac{1+\frac{3}{2}\varepsilon}{2}$$

ובהצבה פעמיים מתקבל $\approx\frac{1+\frac{9}{4}\varepsilon}{2}$.

לדוגמה, אם כל תלמיד בוחר מתמטיקה בסיכוי 0.51, הכיתה כולה תלמד מתמטיקה בסיכוי ≈ 0.5225 (קרוב לתשובה האמיתית עד כדי הספרה החמישית אחרי הנקודה).

הגדרה 4.41. התפלגות גיאומטרית – מבצעים ניסוי עם הסתברות הצלחה p, וסופרים את כמות הפעמים עד להצלחה הראשונה. מסמנים $X\sim\mathrm{Geo}\left(p\right)$ אז פונקציית ההתפלגות היא

$$P\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p$$

לכל $k\in\{1,2,\dots\}$.

טענה 4.42. אם $X\sim\mathrm{Geo}\left(p\right)$ אז $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{p}$ ו-$\mathrm{Var}\left(X\right)=\frac{1-p}{p^2}$.

תרגיל 4.43. חברת ממתקים מחביאה כרטיס בצבע מסוים (מבין שלושה צבעים) בכל חפיסת שוקולד; שיעור צבעי הכרטיסים שווה בין כל החפיסות. מה תוחלת מספר החפיסות שיש לקנות עד לקבלת כרטיסים בכל שלושת הצבעים? ומהי שונות כמות החפיסות הזו?

פתרון. יהי X המשתנה המקרי המייצג את מספר החפיסות שצריך לקנות עד לצבירת כרטיסים מכל שלושת הצבעים. בחפיסה הראשונה הקונים יוצא צבע כלשהו; נקרא לו 'הצבע הראשון'. נכתוב: $X=1+Y+Z$ כאשר Y הוא המשתנה המקרי המייצג את מספר החפיסות שיש לקנות לאחר החפיסה הראשונה ועד לקבלת כרטיס מצבע אחר; ו-Z הוא מספר החפיסות שיש לקנות לאחר שקיבלנו כרטיסים משני צבעים ועד לקבלת הצבע השלישי. אנחנו יודעים כי התוחלת אדיטיבית ולכן $\mathbb{E}\left[X\right]=1+\mathbb{E}\left[Y\right]+\mathbb{E}\left[Z\right]$.

כיצד מתפלג Y? אנחנו מבצעים ניסוי עד לקבלת הצלחה ראשונה, כאשר הסתברות ההצלחה היא $\frac{2}{3}$. לכן $Y\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{2}{3}\right)$, ומכאן $\mathbb{E}\left[Y\right]=\frac{3}{2}$. בדומה, $Z\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$, ולכן $\mathbb{E}\left[Z\right]=3$. בסך הכל $\mathbb{E}\left[X\right]=1+\frac{3}{2}+3=5.5$.

לגבי השונות, נשים לב שפה Y ו-Z הם בלתי־תלויים. אכן, אם אני יודע שלקחו לי 17 חפיסות עד שקיבלתי את הצבע השני, אין שום השפעה על כמה חפיסות אצטרך לקנות עד לקבלת הצבע השלישי. לכן

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathrm{Var}\left(1+Y+Z\right)=\mathrm{Var}\left(1\right)+\mathrm{Var}\left(Y\right)+\mathrm{Var}\left(Z\right)=0+\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}+6=6.75.$$

תרגיל 4.44 (פרדוקס סנט פטרבורג)**.** מנהלים הגרלה באופן הבא. בקופה יש שקל אחד. השחקן מקבל הזדמנות להטיל מטבע הוגן עד לקבלת ה"עץ" הראשון, ואז לקבל את כל המטבעות שבקופה, כשבכל תור מכפילים את כמות המטבעות שבקופה. עבור איזה מחיר תסכימו להיכנס למשחק?

(הפרדוקס קרוי כך על שם מאמרו של דניאל ברנולי שהציג אותו ב-1738 בכתב העת "כתבי האקדמיה המלכותית למדעים של סנט פטרבורג", למרות שמקורו הוא במכתב שכתב ניקולאוס ברנולי, בן דודו של דניאל, ב-1713)

פתרון. יהי X המשתנה המקרי המייצג את הפעם הראשונה שבה יצא עץ. הרווח שלנו במשחק הוא 2^{X-1}. אם נחשב את התוחלת של 2^{X-1}, נדע מתי כדאי להיכנס (יהיה כדאי להיכנס לכל ערך שנמצא מתחת לתוחלת, כי אז תוחלת הרווח שלנו חיובית). אנחנו יודעים ש-$X \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$, ולכן

$$\mathbb{E}\left[2^{X-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot P\left(X=k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

כלומר כדאי להיכנס בכל מחיר למשחק הזה.

תרגיל 4.45. נניח ש-$X \sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$. אז X מקיים **תכונת חוסר זיכרון:**

$$P\left(X = m+n \mid X > n\right) = P\left(X=m\right).$$

הוכחה. ראשית, נחשב את $P\left(X \geq n\right)$:

$$P\left(X > n\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p\left(1-p\right)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-p\right)^{k} = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{\left(1-p\right)^{n+1}}{1-\left(1-p\right)} = \left(1-p\right)^{n}$$

כעת,

$$P\left(X = m+n \mid X > n\right) = \frac{P\left(X=m+n\right)}{P\left(X>n\right)} = \frac{p\left(1-p\right)^{m+n-1}}{\left(1-p\right)^{n}} = p\left(1-p\right)^{m-1} = P\left(X=m\right).$$

□

תרגיל 4.46 (אתגר לבית)**.** אם X משתנה מקרי עם תומך $\{1,2,\dots\}$ שמקיים את תכונת חוסר הזיכרון, אז X מתפלג גיאומטרית.

(קחו את זה כתרגיל לבית. בהמשך הקורס, כאשר נדבר על התפלגויות רציפות, נראה עוד התפלגות המקיימת את התכונה הזו ונוכיח שהיא הרציפה היחידה, ההוכחות יהיו דומות.)

הגדרה 4.47. התפלגות פואסון – מסמנים $X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$. אז פונקציית ההתפלגות היא

$$P\left(X=k\right) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

לכל $k \in \{0,1,2,\dots\}$.

דוגמה 4.48. מה ההתפלגות מתארת?

- מספר המופעים של תופעה מסוימת המתרחשים בפרק זמן נתון, כאשר מניחים שהזמן בין מופע למופע הוא "חסר זיכרון":

- מספר האנשים המתווספים לתור בשעה;
- מספר שיחות הטלפון למרכזייה בדקה;
- כמות שגיאות ההקלדה בעמוד מודפס בעיתון;
- מספר החיילים בגדוד של חיל הפרשים הפרוסי הנהרגים בשנה מבעיטת סוס.

• דרך אחרת לחשוב עליה: קירוב להתפלגות בינומית עם פרופורציה קבועה: אם λ קבוע, אז $\text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \to \text{Poi}\left(\lambda\right)$.

טענה 4.49. אם $X \sim \text{Poi}\left(\lambda\right)$ אז $\mathbb{E}\left[X\right] = \lambda$ וגם $\text{Var}\left(X\right) = \lambda$.

תרגיל 4.50. במאפייה ערבבו $10,000$ פצפוצי שוקולד עם $1,000$ ק"ג בצק עוגיות, כך שנוצרה עיסה במשקל טון להכנת עוגיות שוקולד צ'יפס (משקל הפצפוצים זניח). העיסה ערבבה היטב כך שהפצפוצים מפוזרים באופן אחיד (עד כדי סטייה הסתברותית) בנפח הבצק. כעת מכינים מהבצק 100 חבילות עוגיות במשקל 1 ק"ג כל אחת.

א. מהי התפלגות משקל הפצפוצים בכל חבילה?

ב. עורך הדין בייקר הגיש תביעה בגין פרסום שגוי לאחר שקנה 100 חבילות וגילה שבאחת מהן לא היו כלל פצפוצי שוקולד. הטבח, מר קוק, טען שזה מקרי, אך אינו מעיד על רמאות מצד החברה. מהי ההסתברות לתקרית כמו זו שקרתה לעורך הדין אם אכן החברה איננה מרמה?

ג. מחקר שפורסם בכתב העת "פצפוצים פליליים" העלה שאחת מכל 10^3 מאפיות אכן מרמה, ובכל פעם שלקוח קונה 100 חבילות ומעלה היא משחילה בזדון אחת ללא פצפוצים (ודואגת שבשאר יהיו פצפוצים כדי שלא יהיו חשדות). מה ההסתברות שהמאפייה של מר קוק אכן רמאית, כפי שטוען עורך הדין?

פתרון.

א. התפלגות הפצפוצים בכל חבילה היא פואסונית, כאשר ה"קצב" הממוצע הקבוע של פצפוצים בחבילה הוא 10. לכן $\lambda = 10$.
הסבר נוסף: המשמעות של הפרמטר λ הוא מספר המאורעות (הפצפוצים) הממוצע שמתרחש לכל דגימה. מאחר שהן מפוזרות באופן אחיד, נוכל לומר ש-$\lambda = 10$.

ב. הסיכוי שבחבילה אחת לא יהיו פצפוצים כלל הוא $P\left(\text{Poi}\left(10\right) = 0\right) = e^{-10}$. נסמן על ידי X את כמות החבילות מתוך ה-100 שאין בהן פצפוצים. אם החברה לא מרמה, לכן $X \sim \text{Bin}\left(100, e^{-10}\right)$.

$$P\left(X = 1 \mid \text{החברה לא מרמה}\right) = P\left(\text{Bin}\left(100, e^{-10}\right) = 1\right) = \binom{100}{1} \cdot e^{-10} \cdot \left(1 - e^{-10}\right)^{99} = 0.0045.$$

ג. נסמן על ידי C את המאורע שהחברה מרמה. נרצה להשתמש בחוק בייס:

$$P\left(C \mid X = 1\right) = \frac{P\left(X = 1 \mid C\right) \cdot P\left(C\right)}{P\left(X = 1\right)}.$$

אנחנו יודעים ש-$P\left(X = 1 \mid C\right) = 1$ ו-$P\left(C\right) = 10^{-3}$. מה לגבי $P\left(X = 1\right)$? ניעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} P\left(X = 1\right) &= P\left(X = 1 \mid C\right) \cdot P\left(C\right) + P\left(X = 1 \mid C^c\right) \cdot P\left(C^c\right) = \\ &= 1 \cdot 10^{-3} + 0.0045 \cdot \left(1 - 10^{-3}\right) = 0.0055 \end{aligned}$$

ובסך הכל

$$P\left(C \mid X=1\right)=\frac{1\cdot 10^{-3}}{0.0055}=0.18.$$

תרגיל 4.51. נניח ש-$X\sim\mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$ ו-$Y\sim\mathrm{Poi}\left(\mu\right)$ בלתי־תלויים. מה ההתפלגות של $X+Y$?

פתרון. אינטואיטיבית, אם X מייצג את כמות הפעמים שקורה מאורע עם קצב λ ביחידת זמן, ו-Y מייצג מאורע עם קצב μ, אז $X+Y$ אמור גם הוא להתפלג פואסונית – ויספור את כמות הפעמים שקורה המאורע הראשון או השני.
נחשב ישירות כדי לוודא את האינטואיציה. התומך של $X+Y$ הוא גם $\{0,1,2,\dots\}$.

$$\begin{aligned}P\left(X+Y=k\right)&=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\right)P\left(Y=k-i\right)=\\&=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}\mu^{k-i}}{i!\cdot(k-i)!}=\\&=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{i}\mu^{k-i}=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\left(\lambda+\mu\right)^{k}}{k!}\end{aligned}$$

לכן $X+Y\sim\mathrm{Poi}\left(\lambda+\mu\right)$.

תרגיל 4.52. לחברת דיור יש $10,000$ לקוחות. אם ידוע שבכל חודש, כל לקוח מבקש לעזוב את השירות בהסתברות 0.002 (בלי תלות באחרים), מה ההסתברות שבחודש אחד יעזבו 30 אנשים?

פתרון. נגדיר את X להיות מספר האנשים העוזבים מדי חודש. ההתפלגות המדויקת של X היא $X\sim\mathrm{Bin}\left(10000,0.002\right)$. כלומר, רוצים לחשב את

$$P\left(X=30\right)=\binom{10,000}{30}\cdot 0.002^{30}\cdot 0.998^{9970}.$$

שמישהו יוציא מחשבון.
אלטרנטיבית, ניעזר בקירוב פואסון. אנחנו יודעים שאם הקצב λ קבוע, אז $\mathrm{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\approx\mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$. במקרה שלנו, $\mathrm{Bin}\left(10000,0.002\right)\approx\mathrm{Poi}\left(20\right)$, ולכן

$$P\left(X=30\right)\approx P\left(\mathrm{Poi}\left(20\right)=30\right)=e^{-20}\cdot\frac{20^{30}}{30!}=0.00834\dots$$

(התשובה האמיתית היא $0.00831\dots$).

הגדרה 4.53. התפלגות היפרגיאומטרית – יש N עצמים שמתוכם יש D מיוחדים. שולפים n מתוכם בלי החזרה, וסופרים כמה מיוחדים יצאו. מסמנים $X\sim\mathrm{HG}\left(N,D,n\right)$, ופונקציית ההתפלגות היא

$$P\left(X=k\right)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

לכל $k\in\{0,1,\dots,\min\left\{D,n\right\}\}$.

טענה 4.54. אם $X\sim\mathrm{HG}\left(N,D,n\right)$, אז $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{nD}{N}$ ו-$\mathrm{Var}\left(X\right)=\frac{n\cdot\frac{D}{N}\cdot\left(1-\frac{D}{N}\right)\cdot(N-n)}{N-1}$.

תרגיל 4.55. מספר הדגים באגם אינו ידוע. דגו 1000 דגים וסימנו להם את הסנפיר. אחרי שבוע שוב דגו 1000 דגים ומצאו כי 17 דגים מתוכם מסומנים. העריכו את כמות הדגים באגם.

פתרון. נסמן ב-N את כמות הדגים באגם, ב-A את כמות הדגים המסומנים וב-B את כמות הדגים הלא מסומנים. נשים לב שמתקיים $N = A + B$. אם X היא כמות הדגים המסומנים שדגו לאחר שבוע, נשים לב ש-X הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי:

$$X \sim \mathrm{HG}\left(N, A, n = 1000\right).$$

מכיוון שכך, $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{nA}{N}$. כדי להעריך מהו N נניח ש-17 הדגים שהתקבלו הם בערך התוחלת של X, כלומר $\frac{nA}{N} \approx 17$, ולכן $N \approx \frac{nA}{17} = \frac{1000^2}{17} = 58823.529$.

4.9 תוחלת מותנית

הגדרה 4.56. יהי X משתנה מקרי, ויהי A מאורע מהסתברות חיובית. מגדירים את $\mathbb{E}\left[X \mid A\right] = \sum_a a \cdot P\left(X = a \mid A\right)$.

טענה 4.57 (נוסחת התוחלת השלמה). אם $\Omega = \bigcup_i A_i$ פירוק של המרחב לקבוצות זרות, אז

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[X \mid A_i\right] \cdot P\left(A_i\right).$$

תרגיל 4.58. מטילים קוביה. אם התוצאה היא מספר זוגי, עליי לשלם את המספר שיצא בשקלים. אם התוצאה היא מספר אי-זוגי, אני מרוויח פי שניים מהמספר הכתוב. מה תוחלת הרווח שלי?

פתרון. נסמן על ידי X את הרווח שלי. אז

$$\mathbb{E}\left[X \mid \text{יצא זוגי}\right] = \frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-4) + \frac{1}{3} \cdot (-6) = -4$$
$$\mathbb{E}\left[X \mid \text{יצא אי-זוגי}\right] = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 10 = 6$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \text{יצא זוגי}\right] \cdot P\left(\text{יצא זוגי}\right) + \mathbb{E}\left[X \mid \text{יצא אי-זוגי}\right] \cdot P\left(\text{יצא אי-זוגי}\right) =$$
$$= (-4) \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

הגדרה 4.59. יהיו X ו-Y משתנים מקריים. לכל תוצאה b של Y אפשר להסתכל על המשתנה המקרי $X \mid Y = b$. נגדיר את **התוחלת המותנית של X ב-Y**, שנסמן $\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]$, להיות המשתנה המקרי המוגדר לפי

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right](\omega) = \mathbb{E}\left[X \mid Y = Y(\omega)\right].$$

אינטואיטיבית: ההתנייה של X ב-Y אומרת שאנחנו רוצים ללמוד את ההתפלגות של X אם אנחנו יודעים מה ההתפלגות של Y. המידע הכי טוב שאנחנו יכולים לספק הוא התוחלת של X.

דוגמה 4.60. מטילים מטבע פעמיים. X יסמן את תוצאת ההטלה הראשונה, Y יסמן את כמות הפעמים שקיבלנו 1. המשתנה $X \mid Y = 0$ הוא משתנה שקבוע ל-0, לכן $\mathbb{E}[X \mid Y = 0] = 0$. המשתנה $X \mid Y = 1$ הוא משתנה אחיד על $0, 1$, לכן $\mathbb{E}[X \mid Y = 1] = \frac{1}{2}$. המשתנה $X \mid Y = 2$ הוא משתנה שקבוע ל-1, לכן $\mathbb{E}[X \mid Y = 2] = 1$.

טענה 4.61 (חוק התוחלת החוזרת). $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$.

תרגיל 4.62. בכד נמצאים ארבעה כדורים, שניים מסומנים בספרה 1, אחד בספרה 2 והאחרון בספרה 3. מוציאים שני כדורים מן הכד. יהי X המספר הרשום על הכדור הראשון שהוצא, ו-Y המספר הרשום על הכדור השני שהוצא. מצאו את $\mathbb{E}[X]$, את $\mathbb{E}[Y]$ ואת $\mathbb{E}[X+Y]$ כאשר ההוצאה נעשית:

א. עם החזרה.

ב. בלי החזרה.

פתרון. עבור X קל לדעת בלי קשר להחזרה או לא –

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{7}{4}.$$

ההתפלגות של Y משתנה כתלות בסעיפים.

א. עם החזרה – אז Y מתפלג בדיוק כמו X, כי חזרנו למצב המקורי. לכן $\mathbb{E}[Y] = \frac{7}{4}$, ולכן גם $\mathbb{E}[X+Y] = \frac{7}{2}$.

ב. בלי החזרה – עכשיו כבר יש שינוי כי יש תלות בין המשתנים המקריים. נחשב את התוחלת המותנית של Y ביחס לכל ערך של X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y \mid X = 1] &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2 \\
\mathbb{E}[Y \mid X = 2] &= \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{5}{3} \\
\mathbb{E}[Y \mid X = 3] &= \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

ובסך הכל

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}.$$

גם פה $\mathbb{E}[X+Y] = \frac{7}{2}$.

תרגיל 4.63. מטילים מטבעות הוגנים על שולחן עד לקבלת "עץ". עכשיו לוקחים את אחד המטבעות האלו (באופן אקראי); אם הוא ה"עץ", אני מרוויח את כל המטבעות, ואחרת לא מקבל כלום. מה תוחלת הרווח שלי?

פתרון. נסמן על ידי X את כמות המטבעות עד לקבלת "עץ", ונסמן על ידי Y את הרווח שלי בסוף המשחק. מה ההתפלגות של Y בהינתן X?

$$P(Y = a \mid X = n) = \begin{cases} n, & \frac{1}{n} \\ 0, & 1 - \frac{1}{n} \end{cases}.$$

לכן

$$\mathbb{E}[Y \mid X = n] = n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

ולפי חוק התוחלת החוזרת,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 = 1.$$

תרגיל 4.64. וולדמורט מענה את סיריוס במשרד הקסמים. הוא מטיל קוביה. אם התוצאה היא 1 וולדמורט מתעצבן ורוצח את סיריוס, ואם התוצאה היא $n > 1$, הוא מענה את סיריוס למשך $n - 1$ דקות, ואז חוזר על התהליך. כמה זמן סיריוס צפוי לסבול?

פתרון. נסמן על ידי X את הזמן הצפוי עד שסיריוס יוצא להורג, ועל ידי Y את תוצאת הקוביה. אז

$$\mathbb{E}[X \mid Y = k] = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \mathbb{E}[X] + k - 1, & k > 1 \end{cases}.$$

לכן

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{E}[X \mid Y = k] \cdot P(Y = k) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{6} (\mathbb{E}[X] + k - 1) = \frac{5}{6} \cdot \mathbb{E}[X] + \frac{1}{6} \cdot 15$$

ומכאן נקבל $\mathbb{E}[X] = 15$.

טענה 4.65 (חוק פירוק השונות). אם X ו-Y משתנים מקריים, אז

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y])$$

תרגיל 4.66. מספר שיחות הטלפון המתקבל במרכזייה מתפלג $\mathrm{Poi}(\lambda)$. שיחה היא חשובה בהסתברות p. חשבו את מקדם המתאם בין מספר השיחות בשעה למספר השיחות החשובות בשעה.

פתרון. נסמן את מספר השיחות ב-N ואת מספר השיחות החשובות ב-X. מהנתונים, $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ ו-$X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$. כדי לחשב את השונות המשותפת, נחשב:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[N] = \lambda \\ &\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid N]] = \mathbb{E}[Np] = p\lambda \\ &\mathbb{E}[XN] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XN \mid N]] = \mathbb{E}[N \cdot \mathbb{E}[X \mid N]] = \mathbb{E}[N \cdot Np] = p \cdot \mathbb{E}\left[N^2\right]. \end{aligned}$$

נזכור כי $\mathrm{Var}(N) = \mathbb{E}\left[N^2\right] - \mathbb{E}[N]^2$, ולכן $\mathbb{E}\left[N^2\right] = \lambda^2 + \lambda$. כלומר

$$\mathbb{E}[XN] = p\left(\lambda^2 + \lambda\right).$$

בסך הכל

$$\mathrm{Cov}(X, N) = p\left(\lambda^2 + \lambda\right) - p\lambda^2 = p\lambda.$$

נחשב את השונויות:

$$\mathrm{Var}(N) = \lambda$$

ועבור X ניעזר בפירוק השונות:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid N)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid N]) = \\ &= \mathbb{E}[Np(1-p)] + \mathrm{Var}(Np) = \\ &= p(1-p)\lambda + p^2\lambda = p\lambda\end{aligned}$$

בסך הכל

$$\rho(X,N) = \frac{p\lambda}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\lambda p}} = \sqrt{p}.$$

5 מרחבי הסתברות כלליים

5.1 אלגברות ו-σ-אלגברות

הגדרה 5.1. יהי Ω מרחב מדגם. אוסף תת־קבוצות $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ נקרא **אלגברה** (של קבוצות), אם:

א. $\Omega \in \mathcal{F}$.

ב. סגירות למשלים: אם $A \in \mathcal{F}$ אז $A^c \in \mathcal{F}$.

ג. סגירות לאיחוד: אם $A, B \in \mathcal{F}$ אז $A \cup B \in \mathcal{F}$. (באינדוקציה, היא סגורה לכל איחוד סופי)

$\mathcal{F}$ היא **σ-אלגברה** אם היא סגורה גם לאיחוד בן־מנייה: לכל $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. אז $(\Omega, \mathcal{F})$ נקרא **מרחב מדיד**, והקבוצות שב-$\mathcal{F}$ נקראות **מדידות**.

דוגמה 5.2.

א. אם Ω קבוצה כלשהי, אז 2^Ω היא σ-אלגברה על Ω.

ב. אם Ω קבוצה כלשהי, אז $\{\varnothing, \Omega\}$ היא σ-אלגברה על Ω.

ג. נניח $\Omega = \{1,2,3\}$. אז $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ היא σ-אלגברה על Ω.

תרגיל 5.3. תהי $\mathcal{F}$ אלגברה על Ω, ויהיו $A, B \in \mathcal{F}$.

א. הראו כי $\mathcal{F}$ סגורה לחיתוך, כלומר $A \cap B \in \mathcal{F}$. (בדומה, σ-אלגברה סגורה לחיתוכים בני-מנייה)

ב. הראו כי $\mathcal{F}$ סגורה להפרש סימטרי, כלומר $A \triangle B \in \mathcal{F}$.

פתרון.

א. לפי דה-מורגן, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. כיוון ש-$A, B \in \mathcal{F}$, גם $A^c, B^c \in \mathcal{F}$; לכן $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$, ומהסגירות למשלימים נקבל $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$.

ב. $A, B \in \mathcal{F}$, לכן $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{F}$. לכן גם

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F}.$$

תרגיל 5.4. תנו דוגמה לאלגברה שאינה σ-אלגברה.

פתרון. אם Ω הייתה סופית, אז כל אלגברה על Ω הייתה גם σ-אלגברה. לכן ניקח $\Omega = \mathbb{N}$. היינו רוצים לבנות $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ כך שיהיו בה אינסוף קבוצות שכל איחוד סופי שלהן נשאר ב-$\mathcal{F}$, אבל האיחוד של כולן לא נמצא ב-$\mathcal{F}$. למשל, אפשר להחליט $\{1\}, \{2\}, \cdots \in \mathcal{F}$. לכן כל איחוד סופי שלהן גם צריך להיות ב-$\mathcal{F}$, כלומר $\mathcal{F}$ תכיל כל קבוצה סופית. מהסגירות למשלימים, $\mathcal{F}$ תהיה חייבת להכיל כל משלים של קבוצה סופית (כלומר כל קבוצה **קו-סופית**). נראה שזה מספיק, כלומר שהקבוצה

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq \Omega \mid |S| < \infty\} \cup \{S \subseteq \Omega \mid |\Omega \setminus S| < \infty\}$$

היא אלגברה על Ω שאינה σ-אלגברה.

ראשית $\Omega \in \mathcal{F}$ כי המשלים שלה סופי. הסגירות למשלימים של $\mathcal{F}$ היא ברורה, ולכן נותר להוכיח שהיא סגורה תחת איחוד. יהיו $A, B \in \mathcal{F}$. אם שתיהן סופיות, האיחוד גם הוא סופי, ולכן ב-$\mathcal{F}$. לכן אפשר להניח בה"כ ש-A אינסופית; כלומר בהכרח $|\Omega \setminus A| < \infty$. מכאן

$$\Omega \setminus (A \cup B) \subseteq \Omega \setminus A \Longrightarrow |\Omega \setminus (A \cup B)| < \infty \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

כנדרש.

נראה ש-$\mathcal{F}$ איננה σ-אלגברה. נשים לב כי $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \cdots \in \mathcal{F}$, אבל איחודן, $2\mathbb{N}$, אינו נמצא ב-$\mathcal{F}$, כי גם הוא וגם המשלים שלו אינסופיים.

תרגיל 5.5. תהי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ σ-אלגברה, ונניח כי $Y \subseteq \Omega$ היא תת־קבוצה (לאו דווקא מדידה). בדקו האם

$$\mathcal{M} = \{A \mid A \in \mathcal{F}, A \subseteq Y\}$$
$$\mathcal{N} = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{F}\}$$

הם σ-אלגברות על Y, והוכיחו כי הם שווים אם ורק אם $Y \in \mathcal{F}$.

הוכחה.

- עבור $\mathcal{M}$: נשים לב שכבר הדרישה הראשונה לא בהכרח מתקיימת – Y לא בהכרח שייך ל-$\mathcal{M}$. למשל, אם ניקח $\Omega = \{1,2\}$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, $Y = \{1\}$, אז $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$ אינו σ-אלגברה על Y.
- עבור $\mathcal{N}$: נראה שזו כן σ-אלגברה.
  - $Y \in \mathcal{N}$, כי $Y = \Omega \cap Y \in \mathcal{N}$.
  - <u>סגירות למשלימים:</u> אם $B \in \mathcal{N}$ אז $B = A \cap Y$ עבור איזושהי $A \in \mathcal{F}$; אבל אז $A^c \in \mathcal{F}$, ומתקיים $Y \setminus B = A^c \cap Y \in \mathcal{N}$.
  - <u>סגירות לאיחודים בני-מנייה:</u> נניח $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{N}$. לכן $B_i = A_i \cap Y$ עבור $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$. לכן

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Y) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap Y \in \mathcal{N}.$$

נותר לבדוק מתי הן שוות. אם $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ אז $Y \in \mathcal{M}$, ובפרט $Y \in \mathcal{F}$. מצד שני, נניח $Y \in \mathcal{F}$ ונוכיח $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

- $\boxed{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}}$: תהי $A \in \mathcal{M}$; לכן $A \in \mathcal{F}$ ו-$A \subseteq Y$, כלומר $A = A \cap Y \in \mathcal{N}$.
- $\boxed{\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}}$: תהי $B \in \mathcal{N}$; לכן קיימת $A \in \mathcal{F}$ שעבורה $B = A \cap Y$. אבל אז $B \subseteq Y$ וגם $B \in \mathcal{F}$ כחיתוך של שתי קבוצות מ-$\mathcal{F}$.

□

טענה 5.6. נניח ש-$\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כולן σ-אלגברות על Ω. אז $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ היא σ-אלגברה על Ω.

הגדרה 5.7. תהי Ω קבוצה, ויהי $S \subseteq 2^\Omega$ אוסף של תת־קבוצות של Ω. **ה-σ-אלגברה הנוצרת על ידי** S היא ה-σ-אלגברה הקטנה ביותר על Ω המכילה את S. באופן שקול, היא שווה לחיתוך כל ה-σ-אלגברות על Ω שמכילות את S.

תרגיל 5.8. מיהי ה-σ-אלגברה הנוצרת על הקבוצה $\Omega = \{1,2,3,4\}$ על ידי אוסף תת־הקבוצות $S = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$?

פתרון. נסמן את ה-σ-אלגברה הזו על ידי $\mathcal{F}$. מהסגירות לחיתוכים, $\{1,2,3\} \cap \{1,2,4\} = \{1,2\} \in \mathcal{F}$. אבל אז גם $\{3\} = \{1,2,3\} \setminus \{1,2\} \in \mathcal{F}$ וגם $\{4\} \in \mathcal{F}$ באופן דומה. צריך גם סגירות לאיחודים, ואפשר לוודא שאכן

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

היא ה-σ-אלגברה הרצויה.

הגדרה 5.9. **σ-אלגברת בורל על** $\mathbb{R}$ היא ה-σ-אלגברה הנוצרת על ידי כל הקטעים הפתוחים. היא מסומנת לפעמים $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

דוגמה 5.10. הוכיחו כי לכל $a \leq b \in \mathbb{R}$,

א. $\{a\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

ב. $(a, \infty) \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

ג. (לבית: גם קטעים סגורים, קטעים חצי-פתוחים וכו' נמצאים ב-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$)

הוכחה.

א. נשים לב כי $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. כל קטע פתוח נמצא ב-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$, ולכן גם החיתוך שלהם (שהוא חיתוך של מספר בן־מנייה של קבוצות) נמצא ב-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

ב. נשים לב כי $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a+n)$, ולכן כאיחוד בן־מנייה של קבוצות מדידות נקבל $(a, \infty) \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

□

5.2 מרחבי הסתברות

הגדרה 5.11. יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד. **פונקציית הסתברות** על $(\Omega, \mathcal{F})$ היא פונקציה $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ המקיימת:

א. $P(\Omega) = 1$.

ב. אם $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ קבוצות זרות בזוגות, אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$.

אומרים ש-$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות.

דוגמה 5.12. נגדיר בתור Ω את האוסף הבא של סדרות של 0-ים ו-1-ים:

$$1, 01, 001, 0001, \ldots$$

כלומר סדרות של אפסים ובסופן 1. נסמן 0^n1 בתור הסדרה עם n אפסים בתחילתה ($n \geq 0$). נוסיף ל-Ω את הסדרה האינסופית $0^\infty = 000\ldots$. תהי $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ה-σ-אלגברה המלאה. נגדיר פונקציית הסתברות $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ על ידי

$$\begin{aligned} P\left(\{0^n1\}\right) &= 2^{-(n+1)} \\ P\left(\{0^\infty\}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ונרחיב את P לכל $\mathcal{F}$ על ידי הסכום

$$P\left(S\right) = \sum_{n:0^n1 \in S} P\left(\{0^n1\}\right).$$

הוכיחו כי P היא פונקציית הסתברות, ותנו פירוש מילולי למרחב ההסתברות.

פתרון. לפי ההגדרה זוהי פונקציה אי-שלילית. אם $S_1, S_2, \ldots$ זרות בזוגות, אז $0^n1 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ אם ורק אם הוא משתייך בדיוק לאחת מבין הקבוצות האלו. לכן

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{n:0^n1 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i} P\left(\{0^n1\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n:0^n1 \in S_i} P\left(\{0^n1\}\right) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(S_i\right)$$

לבסוף,

$$P\left(\Omega\right) = \sum_{n:0^n1 \in S} P\left(\{0^n1\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

לכן P מגדירה פונקציית הסתברות. הניסוי המתואר על ידי הפונקציה הוא ניסוי "גיאומטרי": עורכים סדרת הגרלות של $0, 1$ (בהסתברות שווה) עד לקבלת 1.

5.3 רציפות ההסתברות

טענה 5.13. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. אז:

א. אם $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ סדרה עולה של קבוצות מדידות, אז $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$.

ב. אם $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ סדרה יורדת של קבוצות מדידות, אז $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right)$.

תרגיל 5.14. מטילים מטבע הוגן אינסוף פעמים. הוכיחו שההסתברות לקבל רק מספר סופי של פעמים "עץ" היא 0.

הוכחה. יהי A המאורע שבו מתקבל רק מספר סופי של פעמים "עץ". נגדיר B_n להיות המאורע שהחל מההטלה ה-n-ית כל ההטלות הן "פלי". לכן $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$, ומתקיים $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. לכן נרצה לחשב את $P(B_n)$.

כדי לחשב את B_n, לכל $k \geq n$ נסמן $C_{n,k}$ להיות המאורע שכל ההטלות מההטלה ה-n עד להטלה ה-k הן "פלי". אז $C_{n,n} \supseteq C_{n,n+1} \supseteq \cdots$, ומתקיים $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} C_{n,k}$. נשים לב כי $P(C_{n,k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1}$, ולכן $P(B_n) = \lim_{k\to\infty} P(C_{n,k}) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1} = 0$. מכאן נקבל $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. □

5.4 משתנים מקריים רציפים

הגדרה 5.15. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. **משתנה מקרי** על Ω הוא פונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כך שלכל $a < b$, $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{F}$. שקול: התמונה ההפוכה של כל קבוצה מדידה בורל היא מדידה לפי $\mathcal{F}$.

דוגמה 5.16.

א. לכל מרחב הסתברות, $X = 165$ הוא משתנה מקרי.

ב. אם $\Omega = \mathbb{R}$ ו-$\mathcal{F} = \mathbb{B}(\mathbb{R})$, אז $X = 1_{[a,b]}$ הוא משתנה מקרי.

ההתפלגות של משתנה מקרי. נרצה כלים לתאר את ההתפלגות של משתנה מקרי. הבעיה היא שפונקציית ההתפלגות שהכרנו עד כה, $a \mapsto P(X = a)$, היא לא טובה. למשל, אם אנחנו מגרילים מספר באופן אחיד בין 0 ל-1, הסיכוי לקבל כל נקודה בודדת הוא 0. אז הפונקציה הזו לא תיתן לנו אינפורמציה בכלל.

הגדרה 5.17. פונקציית ההתפלגות המצטברת (function distribution cummulative) של משתנה מקרי X היא

$$F_X(a) = P(X \leq a).$$

טענה 5.18. F_X מקיימת את התכונות הבאות:

א. F_X מונוטונית לא יורדת.

ב. $\lim_{a\to\infty} F_X(a) = 1$, $\lim_{a\to-\infty} F_X(a) = 0$.

ג. F_X רציפה מימין. כלומר, $\lim_{h\to 0^+} F_X(a+h) = F_X(a)$.

ד. F_X רציפה בנקודה a אם ורק אם $P(X = a) = 0$.

הגדרה 5.19. אומרים ש-X **משתנה מקרי רציף** אם קיימת פונקציה $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

לכל $a < b$ ממשיים. לפונקציה f_X קוראים **פונקציית הצפיפות** (density probability function) של X, ומתקיים $f_X = F_X'$.

טענה 5.20. f_X מקיימת את התכונות הבאות:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

ב. לכל $a<b$, $\int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x = P(a \le X \le b)$.

דוגמה 5.21. איך נגדיר הגרלה אחידה בקטע $[0,1]$? נרצה להגיד שהסיכוי ליפול בקטע מסוים הוא פרופורציוני לאורך שלו בתוך $[0,1]$. כלומר לכל $0 \le a < b \le 1$ נרצה

$$P(a \le X \le b) = b - a.$$

אז אפשר להגדיר

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

ופונקציית הצפיפות היא

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ או } x > 1 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

איך צריך לדמיין את f_X? ככל שהשטח מתחת לגרף שלה גדול יותר, כך ההסתברות ליפול באותו תחום גדולה.

הגדרה 5.22. יהי X משתנה מקרי רציף. נגדיר את **התוחלת** של X להיות

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

ואת ה**שונות** שלו להיות

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2.$$

מתקיימות אותן התכונות כמו שהכרנו אצל משתנים מקריים בדידים.

תרגיל 5.23. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = \begin{cases} cx^n, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. חשבו את $P\left(X \le \frac{1}{2}\right)$.

ד. חשבו את החציון של X, כלומר a שעבורו $P(X \le a) = \frac{1}{2}$.

פתרון.

א. נחשב את c לפי תכונת האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

אצלנו התומך הוא $[0,1]$, ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx^n\,\mathrm{d}x = \left(\frac{cx^{n+1}}{n+1}\right)_0^1 = \frac{c}{n+1} = 1.$$

כלומר $c = n+1$.

ב. לפי ההגדרה,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}x.$$

אם $x \le 0$, אז $F_X(x) = 0$. אם $x \ge 1$, אז $F_X(x) = 1$. אם $0 < x < 1$,

$$F_X(x) = \int_0^x (n+1)\,t^n\,\mathrm{d}t = x^{n+1}.$$

ג. $P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

ד. מן הסתם $0 \le a \le 1$. לכן רוצים $a^{n+1} = F_X(a) = \frac{1}{2}$, כלומר $a = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$.

תרגיל 5.24. משתנה מקרי X מוגדר על ידי פונקציית הצפיפות

$$f_X(t) = \begin{cases} at^2 + bt, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$. נתון כי $\mathbb{E}[X] = 0.6$. חשבו את $P\left(X \le \frac{1}{2}\right)$ ואת $\mathrm{Var}(X)$.

פתרון. ראשית, נשתמש בתכונה של פונקציית הצפיפות:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(at^2 + bt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

מצד שני, לפי הנתון על התוחלת,

$$0.6 = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(at^3 + bt^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}.$$

קיבלנו מערכת משוואות לינאריות

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1, \qquad \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = 0.6.$$

אם נפתור אותה נקבל $a = -2.4$ ו-$b = 3.6$.
ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-2.4t^2 + 3.6t\right)\,\mathrm{d}t = \left(-0.8t^3 + 1.8t^2\right)_0^{\frac{1}{2}} = 0.25.$$

לחישוב השונות,

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-2.4t^4 + 3.6t^3\right)\,\mathrm{d}t = -0.48 \cdot 1^5 + 0.9 \cdot 1^4 = 0.42$$

ונקבל

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 0.42 - 0.6^2 = 0.42 - 0.36 = 0.06.$$

תרגיל 5.25 ("המקרה המעורב"). זמן החיים בחודשים של שפופרת אלקטרונית הוא משתנה מקרי X המוגדר באמצעות פונקציית הצפיפות

$$f_X(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. חשבו את תוחלת זמן החיים של שפופרת.

ב. במפעל שבו מותקנות 10 שפופרות בלתי־תלויות, מה הסיכוי שלפחות שתיים מהן תחזקנה מעמד לפחות שלושה חודשים?

פתרון.

א. נחשב על פי הנוסחה:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left(-t^2e^{-t}\right)_0^\infty - \int_0^\infty 2t\left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_0^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$$

ב. הסיכוי של שפופרת מסוימת להחזיק מעמד יותר משלושה חודשים הוא

$$P(X \geq 3) = \int_3^\infty f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_3^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left(-te^{-t}\right)_3^\infty - \int_3^\infty \left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 3e^{-3} + \int_3^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 3e^{-3} + \left(-e^{-t}\right)_3^\infty = 4e^{-3}$$

כעת, ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות ללפחות 2 הצלחות מתוך 10 ניסויים בלתי־תלויים, כלומר התפלגות בינומית:

$$P\left(\mathrm{Bin}\left(10, 4e^{-3}\right) \geq 2\right) = 1 - P\left(\mathrm{Bin}\left(10, 4e^{-3}\right) < 2\right) =$$
$$= 1 - \left(1-4e^{-3}\right)^{10} - 10 \cdot 4e^{-3} \cdot \left(1-4e^{-3}\right)^9 \approx 0.622$$

5.5 טרנספורמציות של משתנים מקריים

בהרבה מקרים יהיה נתון לנו משתנה מקרי X שאנחנו מבינים, ונרצה ללמוד באמצעותו התפלגות של טרנספורמציה עליו, $h(X)$.

תרגיל 5.26. נתון משתנה מקרי X בעל צפיפות $f_X(t) = 2te^{-t^2}, t > 0$. מצאו את פונקציית הצפיפות של $Y = X^2$.

פתרון. נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y, ואז נסיק את הצפיפות כנגזרת. לכל $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$$

נגזור ונקבל

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F_X(\sqrt{y})\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2\sqrt{y}e^{-y} = e^{-y}.$$

זו **התפלגות מעריכית** שנפגוש בהמשך.

תרגיל 5.27. יהי X משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$, כלומר

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

מהי ההתפלגות של $Y = -\log X$?

פתרון. נחשב:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\log X \le y) = P\left(X \ge e^{-y}\right) = 1 - F_X\left(e^{-y}\right).$$

קל לוודא שפונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ולכן

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-y}, & y \ge 0 \end{cases}.$$

אם רוצים את הצפיפות נקבל

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ e^{-y}, & y \ge 0 \end{cases}$$

טענה 5.28. יהי X משתנה מקרי, ונניח ש-h פונקציה הפיכה וגזירה ברציפות. אם $Y = h(X)$, אז

$$f_Y(h(x)) = f_X(x) \cdot \left|\frac{1}{h'(x)}\right|.$$

תרגיל 5.29. נתון $X \sim U\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. מהי הצפיפות של $Y = \tan X$?

פתרון. נשים לב כי

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ולכן

$$P(Y \le y) = P(\tan X \le y) = P(X \le \arctan y)$$

שימו לב שתמיד $\arctan X \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ולכן

$$P(Y \le y) = \frac{\arctan y + \frac{\pi}{2}}{\pi},$$

כלומר פונקציית הצפיפות היא

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

אם היינו רוצים להשתמש בטענה, נשים לב ש-$h(x) = \tan X$ היא פונקציה הפיכה וגזירה ברציפות על $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. לכן

$$f_Y(\tan x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{(\tan x)'} \right| = \frac{\cos^2 x}{\pi}$$

ואם נציב $y = \tan x$ נקבל $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$, כלומר

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

להתפלגות הזו קוראים **התפלגות קושי סטנדרטית**.
שימו לב שלהתפלגות הזו אין תוחלת! זה נכון כי

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(1+y^2)} \, \mathrm{d}y$$

לא מתכנס.

תרגיל 5.30. למשתנה מקרי X יש צפיפות $f_X(x) = ax^2$ על הקטע $[0, b]$. חשבו את הצפיפות של $Y = X^3$.

תרגיל 5.31. יהי X משתנה מקרי עם פונקציית התפלגות מצטברת רציפה ועולה ממש F_X. נסמן $Y = F_X(X)$. זהו משתנה מקרי בעצמו. חשבו את ההתפלגות של Y. (אפשר להוריד את ההנחה של "עולה ממש", אנחנו לא נעשה את זה)

פתרון. נבדוק ישירות (אפשר גם להוכיח עם הטענה הנ"ל, אבל זה יהיה מבלבל). הפונקציה F_X עולה ממש ורציפה, ולכן היא הפיכה על הקטע $[0,1]$ וההופכית שלה F_X^{-1} רציפה בקטע הזה:

$$F_Y(y) = P(F_X(X) \le y) = P\left(X \le F_X^{-1}(y)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) = y.$$

מה קורה מחוץ לקטע $[0,1]$? אם $y < 0$ אז $F_Y(y) = 0$, כי Y הוא משתנה אי-שלילי; אם $y > 1$ אז $F_Y(y) = 1$, כי $Y \le 1$. לכן

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

כלומר Y הוא משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$.

5.6 זוגות של משתנים מקריים רציפים

הגדרה 5.32. יהיו X, Y משתנים מקריים רציפים. **פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם** היא פונקציה $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המקיימת

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

אומרים ש-X, Y הם **בלתי־תלויים** אם $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

במקרה הזה, כדי לחשב הסתברויות על זוג המשתנים המקריים, נבצע אינטגרל כפול על השטח הרצוי.

תרגיל 5.33. נתונים שני משתנים מקריים X ו-Y בעלי צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. מצאו את ערכו של c.

ב. חשבו את פונקציית הצפיפות השולית של X.

ג. חשבו את ההסתברות ש-$X > Y$.

פתרון.

א. נבצע אינטגרל כפול ונשווה ל-1:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^2 c\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= c\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right)_0^2 \mathrm{d}x = c\int_0^1 \left(2x^2 + x\right)\mathrm{d}x = c\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)_0^1 = \\ &= c\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = c\cdot\frac{7}{6} \end{aligned}$$

לכן $c = \frac{6}{7}$.

ב. נחשב את פונקציית הצפיפות השולית:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{6}{7}\left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right)_0^2 = \frac{6}{7}\left(2x^2 + x\right) \end{aligned}$$

ג. כדי לחשב את ההסתברות הזו, צריך לבצע אינטגרל כפול על השטח המתאים למאורע $X > Y$. במקרה שלנו,

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^1\int_0^x \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right)_0^x \mathrm{d}x = \\ &= \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{14}\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{15}{56} \end{aligned}$$

אופציה אחרת: להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה הרציפה:

$$P(X > Y) = \int_0^2 P(X > Y \mid Y = t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 P(X > t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

ואז צריך לחשב גם את הצפיפות של Y ואת פונקציית ההצטברות של X (תרגיל לבית).

איך מחליפים משתנים? במקרה הזה, אם $U = h_1(X,Y)$ ו-$V = h_2(X,Y)$, אז

$$f_{U,V}(h_1(x,y), h_2(x,y)) = f_{X,Y}(x,y) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} \right|^{-1}.$$

למטריצה הזו קוראים **מטריצת יעקובי**. תלמדו עליה עוד באינפי 3.

תרגיל 5.34. יהיו X, Y משתנים מקריים שהצפיפות המשותפת שלהם נתונה על ידי הנוסחה

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x < y \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

חשבו את הצפיפות המשותפת של $U = \frac{X}{Y}$ ו-$V = Y$, והסיקו כי הם בלתי־תלויים.

שימו לב ש-X ו-Y תלויים זה בזה, כי התחום שעליו מוגדרת הצפיפות המשותפת הוא לא "מלבני". כלומר, הערכים ש-Y יכול לקבל תלויים בערכים ש-X יכול לקבל.

פתרון. נשים לב ש-U, V שניהם בעלי תומך $[0,1]$. כמו כן, אין קשר ביניהם, במובן שהזוג (U,V) יכול לקבל כל ערך ב-$[0,1] \times [0,1]$. נגדיר $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ לפי

$$h(x,y) = \left(\frac{x}{y}, y \right).$$

אז $(U,V) = h(X,Y)$. לפני שנחשב את הצפיפות המשותפת, נהפוך את h:

$$h^{-1}(u,v) = (uv, v).$$

נחשב את מטריצת יעקובי:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y) \cdot |\det J|^{-1} = 8xy \cdot y = 8xy^2.$$

במונחים של u, v, נזכור כי $x = uv$ ו-$y = v$, ולכן

$$f_{U,V}(u,v) = 8uv^3.$$

כדי להוכיח שהם בלתי־תלויים, נחשב את הצפיפויות השוליות:

$$f_U(u) = \int_0^1 f_{U,V}(u,v)\, \mathrm{d}v = \int_0^1 8uv^3 \, \mathrm{d}v = u \left(2v^4 \right)_0^1 = 2u$$

ובדומה

$$f_V(v) = \int_0^1 f_{U,V}(u,v)\, \mathrm{d}u = \int_0^1 8uv^3 \, \mathrm{d}u = v^3 \left(4u^2 \right)_0^1 = 4v^3.$$

מכאן קל לראות שהם בלתי־תלויים.

5.7 התפלגויות רציפות מיוחדות

הגדרה 5.35. התפלגות אחידה רציפה – משתנה מקרי X המקבל ערכים בקטע סופי $[a,b]$. פונקציית ההתפלגות המצטברת היא

$$.F_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

פונקציית הצפיפות היא

$$.f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

מסמנים $X\sim U[a,b]$. התוחלת שלו היא $\frac{a+b}{2}$, והשונות $\frac{(b-a)^2}{12}$.

תרגיל 5.36. נניח כי $X\sim U[0,1]$. מה ההתפלגות של $Y=4X+1$?

פתרון. נשים לב שהתומך של Y הוא הקטע $[1,5]$. אפשר לחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת: לכל $1\le y\le 5$,

$$.F_Y(y)=P(Y\le y)=P(4X+1\le y)=P\left(X\le\frac{y-1}{4}\right)=\frac{y-1}{4}$$

אם זה לא מוכר, אפשר לחשב את הצפיפות:

$$.f_Y(y)=\frac{1}{4}$$

זו בדיוק ההתפלגות של משתנה מקרי אחיד $[1,5]$, כלומר $Y\sim U[1,5]$.

תרגיל 5.37. נניח כי $X\sim U[0,5]$ משתנה מקרי רציף. מהי ההסתברות ששורשי המשוואה

$$4t^2+4Xt+X+2=0$$

הם ממשיים?

פתרון. שורשי המשוואה $at^2+bt+c=0$ הם ממשיים אם ורק אם $b^2-4ac\ge 0$. עבור המשוואה שלנו רוצים

$$,16(X-2)(X+1)=16\left(X^2-X-2\right)=16X^2-16X-32=(4X)^2-4\cdot 4\cdot(X+2)\ge 0$$

כלומר $X\ge 2$ או $X\le -1$. אבל $X\sim U[0,5]$, לכן

$$.P(X\le -1\text{ או }X\ge 2)=P(X\ge 2)=\frac{3}{5}$$

הגדרה 5.38. התפלגות מעריכית – מתארת את הזמן עד שמתרחש אירוע שהסיכוי שלו להתרחש קבוע בזמן. מסמנים $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$. פונקציית ההתפלגות המצטברת היא

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

ופונקציית הצפיפות היא

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

אם $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, אז $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ והשונות היא $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

טענה 5.39. התפלגות מעריכית היא ההתפלגות הרציפה היחידה עם תומך $[0, \infty)$ המקיימת את תכונת חוסר הזיכרון:

$$P(X > a + b \mid X > a) = P(X > b).$$

הוכחה. ראשית נוכיח שאם $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ אז הוא מקיים חוסר זיכרון:

$$P(X > a + b \mid X > a) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{1 - P(X \leq a + b)}{1 - P(X \leq a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(X > b).$$

כעת, יהי Y משתנה מקרי עם תומך $[0, \infty)$ המקיים את תכונת חוסר הזיכרון. אם נסמן $G_Y(a) = P(Y > a)$, מהנתון נקבל

$$G_Y(a + b) = G_Y(a) \cdot G_Y(b).$$

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ נקבל $G_Y(n) = G_Y(1 + \cdots + 1) = G_Y(1)^n$, ובנוסף לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$G_Y(1)^m = G_Y(m) = G_Y\left(\underbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}_{n}\right) = G_Y\left(\frac{m}{n}\right)^n$$

כלומר $G_Y\left(\frac{m}{n}\right) = G_Y(1)^{\frac{m}{n}}$. מהרציפות של G_Y נקבל $G_Y(a) = G_Y(1)^a$ לכל $a \geq 0$, וכך בדיוק נראית התפלגות אקספוננציאלית ($\lambda = -\log G_Y(1)$). □

תרגיל 5.40. הזמן עד שאוטובוס מגיע לתחנה מתפלג $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10}\right)$. מה הסיכוי שאצטרך לחכות לפחות 20 דקות עד לאוטובוס הבא? ואם כבר חיכיתי 20 דקות, מה הסיכוי שאצטרך לחכות עוד 20 דקות?

פתרון. נסמן את המשתנה על ידי X. אז

$$P(X \geq 20) = 1 - F_X(20) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 20}\right) = e^{-2} = 0.1353.$$

זו גם התשובה לשאלה השנייה בגלל חוסר הזיכרון.

תרגיל 5.41. הגובה של הרי געש מתפלג $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

א. מה ההסתברות שמבין n הרי געש שנבחרו באקראי, יהיו בדיוק m שגובהם מעל λ?

ב. בוחרים שני הרי געש אקראיים בלתי־תלויים. מה ההסתברות שהראשון גבוה לפחות פי 2 מהשני?

ג. מטפסת הרים מטפסת מדי יום על הר אקראי. עלות הטיפוס על כל הר היא S, וכאשר היא מוצאת הר שגובהו יותר מ-λ היא זוכה בפרס בגובה R. מה צריך להיות ערך הפרס על מנת שתוחלת הרווח של המטפסת תהיה חיובית?

פתרון.

א. הסיכוי של הר געש מסוים להיות עם גובה גדול מ-λ הוא $P(X > \lambda) = e^{-\lambda^2}$. לפיכך אנחנו מתעניינים בסיכוי

$$P\left(\text{Bin}\left(n, e^{-\lambda^2}\right) = m\right) = \binom{n}{m} e^{-m\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda^2}\right)^{n-m}.$$

ב. נסמן את הגבהים שלהם X_1, X_2. אפשר לפתור על ידי אינטגרציה כפולה, או על ידי נוסחת ההסתברות השלמה הרציפה:

$$P(X_1 > 2X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_1 > 2X_2 \mid X_2 = t) f_{X_2}(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} P(X_1 > 2t) \cdot f_{X_2}(t)\, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{\infty} e^{-3\lambda t}\, \mathrm{d}t = \lambda\left(-\frac{e^{-3\lambda t}}{3\lambda}\right)_0^{\infty} = \lambda\left(0 + \frac{1}{3\lambda}\right) = \frac{1}{3}$$

ג. אם היא מטפסת על T הרים, אז $T \sim \text{Geo}\left(e^{-\lambda^2}\right)$. לכן תוחלת הרווח שלה היא

$$\mathbb{E}[R - T \cdot S] = R - \mathbb{E}[T] \cdot S = R - e^{\lambda^2} S$$

ונקבל שכדי שהתוחלת תהיה חיובית צריך $R > e^{\lambda^2} S$.

הגדרה 5.42. התפלגות נורמלית – התפלגות נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 היא ההתפלגות $X \sim \text{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ בעלת פונקציית הצפיפות

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

אם $X \sim \text{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ אז אפשר לנרמל ולקבל $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{N}(0,1)$.

כדי לחשב את ההסתברויות של התפלגות נורמלית, אפשר להיעזר בטבלת התפלגות נורמלית.

תרגיל 5.43. ציון ה-IQ באוכלוסיה מתפלג $X \sim \text{N}\left(100, 15^2\right)$.

א. מהי ההסתברות שלאדם יש IQ פחות מ-70?

ב. מהו ה-IQ המינימלי שצריך על מנת להתקבל למועדון "המאיון העליון" של מנת המשכל?

פתרון. הנרמול הוא $Z = \frac{X-100}{15} \sim \text{N}(0,1)$.

א. ההסתברות היא

$$P(X < 70) = P\left(\frac{X - 100}{15} < \frac{70 - 100}{15}\right) = P(Z < -2) = 0.02275.$$

ב. אנחנו רוצים לפתור $P(X > a) = 0.01$, ובאופן שקול $P\left(Z > \frac{a-100}{15}\right) = 0.01$. אפשר לבדוק בטבלה ולראות שצריך $\frac{a-100}{15} \approx 2.325$, ולכן $a \approx 134.9$.

תרגיל 5.44. מגרילים נקודות על ציר ה-x וציר ה-y לפי $P, Q \sim \mathrm{N}(0,1)$ באופן בלתי־תלוי. חשבו את תוחלת שטח המשולש שהנקודות האלו יוצרות עם הצירים.

פתרון. שטח המשולש הוא $S = \frac{|P| \cdot |Q|}{2}$. לכן

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\left[\frac{|P| \cdot |Q|}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|P|]\,\mathbb{E}[|Q|].$$

כעת, נחשב שאם $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, אז

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

לכן

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\pi}.$$

תרגיל 5.45. נתון ש-X הוא משתנה מקרי המתפלג נורמלית. ידוע כי $P(X < 0.9) = 0.9$ ו-$P(X < 0.7) = 0.7$. מצאו את $P(X < 0.5)$.

פתרון. התפלגות נורמלית נקבעת על פי שני פרמטרים: התוחלת μ וסטיית התקן σ. נזכור את הנרמול $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. לפי הנתונים,

$$P(X < 0.9) = P\left(\frac{Z-\mu}{\sigma} < \frac{0.9-\mu}{\sigma}\right) = 0.9 \Longrightarrow \frac{0.9-\mu}{\sigma} \approx 1.285$$
$$P(X < 0.7) = P\left(\frac{Z-\mu}{\sigma} < \frac{0.7-\mu}{\sigma}\right) = 0.7 \Longrightarrow \frac{0.7-\mu}{\sigma} \approx 0.525$$

משתי המשוואות מקבלים $\mu \approx 0.562$ ו-$\sigma \approx 0.263$, כלומר

$$P(X < 0.5) = P\left(Z < \frac{0.5 - 0.562}{0.263}\right) = P(Z < -0.236) = 0.408$$

הערה. סכום של משתנים מקריים נורמליים ב"ת הוא גם נורמלי: כלומר,

$$\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathrm{N}(\mu_1^2 + \mu_2^2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

הערה. הרבה התפלגויות אפשר לקרב על ידי התפלגות נורמלית. למשל:

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{N}(np, np(1-p))$$
$$\mathrm{Poi}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda)$$

כאשר מקרבים משתנה מקרי בדיד על ידי נורמלי, צריך להשתמש בתיקון רציפות.

תרגיל 5.46. מטילים קוביה הוגנת 720 פעמים.

א. העריכו את הסיכוי לקבל בדיוק 120 פעמים 1.

ב. העריכו את הסיכוי לקבל בין 90 ל-100 פעמים 1 (כולל).

פתרון. המשתנה שסופר את כמות ה-1-ים הוא $X \sim \mathrm{Bin}(720, \frac{1}{6})$.

א. נעריך על ידי התפלגות נורמלית: X מתפלג בקירוב $= \mathrm{N}(720 \cdot \frac{1}{6}, 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6})$ $\mathrm{N}(120, 100)$. לכן

$$P(X = 120) \approx P(119.5 \le \mathrm{N}(120, 100) \le 120.5) = P\left(\frac{119.5 - 120}{10} \le \mathrm{N}(0,1) \le \frac{120.5 - 120}{10}\right) =$$
$$= P(-0.05 \le \mathrm{N}(0,1) \le 0.05) = \Phi(0.05) - \Phi(-0.05) \approx 0.51994 - 0.48006 = 0.03988$$

(התשובה האמיתית: ...0.03987; התשובה על ידי קירוב פואסון: ...0.03639)

ב. נעריך שוב על ידי התפלגות נורמלית:

$$P(90 \le X \le 100) \approx P(89.5 \le \mathrm{N}(120, 100) \le 100.5) = P\left(\frac{89.5 - 120}{10} \le \mathrm{N}(0,1) \le \frac{100.5 - 120}{10}\right) =$$
$$= P(-3.05 \le \mathrm{N}(0,1) \le -1.95) = \Phi(-1.95) - \Phi(-3.05) \approx 0.02559 - 0.00114 = 0.02445$$

(התשובה האמיתית: $\ldots 0.02282$).

6 נושאים נוספים

6.1 אי-שוויונים

המטרה. בהינתן משתנה מקרי X, להבין מה הסיכוי שלו לקבל ערך "קיצוני" אם אנחנו יודעים רק את המומנטים של X.

טענה 6.1 (אי-שוויון מרקוב). לכל $X \ge 0$ משתנה מקרי אי-שלילי, אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$P(X \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

תרגיל 6.2. השכר הממוצע במשק הוא $11,000$ ש"ח. הוכיחו שבעשירון העליון יש מישהו שמרוויח לכל היותר $110,000$ ש"ח.

פתרון. נסמן על ידי X את המשתנה המקרי של השכר של כל אדם. לפי הנתון $\mathbb{E}[X] = 11000$. אם השכר המינימלי של האנשים בעשירון העליון הוא a, אז $P(X \ge a) = 0.1$. לפי אי-שוויון מרקוב,

$$0.1 = P(X \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

ולכן $a \le \frac{\mathbb{E}[X]}{0.1} = 110,000$, כנדרש.

תרגיל 6.3. תנו חסם לא טריוויאלי לסיכוי שבכיתה של 30 תלמידים יהיו לפחות חמישה זוגות של תלמידים שנולדו באותו היום.

פתרון. נסמן על ידי $I_{i,j}$ את משתנה האינדיקטור של המאורע "התלמיד ה-i וה-j נולדו באותו היום", ונסמן $X = \sum_{1 \le i < j \le 30} I_{i,j}$ כמספר הזוגות של תלמידים שנולדו באותו היום. לפי אדיטיביות התוחלת,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{1 \le i < j \le 30} \mathbb{E}[I_{i,j}] = \binom{30}{2} \cdot \frac{1}{365} \approx 1.19.$$

מאי-שוויון מרקוב,

$$.P(X \geq 5) \leq \frac{1.19}{5} \approx 0.24$$

טענה 6.4 (אי-שוויון צ'בישב). לכל משתנה מקרי X בעל שונות ולכל $a > 0$,

$$.P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

תרגיל 6.5 (ממבחן). נתונים משתנים מקריים רציפים $X_1, \ldots, X_{10} \sim U[0, 10]$ וכן $Y_1, \ldots, Y_{10} \sim \mathrm{Exp}(1)$. נסמן $S = X_1 + \cdots + X_{10} + Y_1 + \cdots + Y_{10}$.

א. אם כולם ב"ת בזוגות, תנו חסם לא טריוויאלי מלמעלה על $P(S \geq 100)$.

ב. תנו חסם ללא הנחת האי-תלות.

פתרון. נשים לב כי בלי קשר לתלות,

$$.\mathbb{E}[S] = 10 \cdot \frac{10}{2} + 10 \cdot 1 = 60$$

א. אם כולם בלתי־תלויים בזוגות, השונות תהיה סכום השונויות. לכן

$$.\mathrm{Var}(S) = 10 \cdot \frac{10^2}{12} + 10 \cdot 1 = \frac{1120}{12} = \frac{280}{3}$$

לפי אי-שוויון צ'בישב,

$$.P(S \geq 100) = P(S-60 \geq 40) \leq P(|S-60| \geq 40) \leq \frac{^{280}/_3}{40^2} = \frac{7}{120} \approx 0.05833\ldots$$

ב. אם לא מניחים אי-תלות אי אפשר להשתמש באי-שוויון צ'בישב, כי אין לנו דרך טובה לחשב את השונות. אז אפשר להשתמש באי-שוויון מרקוב:

$$.P(S \geq 100) \leq \frac{\mathbb{E}[S]}{100} = \frac{60}{100} = 0.6$$

תרגיל 6.6. שפרו את החסם מתרגיל 6.3.

פתרון. נרצה לשפר את החסם שנתנו קודם על ידי שימוש באי-שוויון צ'בישב. לצורך כך נרצה לחשב את השונות של X. הבעיה היא שהמשתנים $I_{i,j}$ הם כן תלויים (למשל בשלשות). לכן

$$.\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\sum_{i,j} I_{i,j}) = \sum_{(i,j)} \mathrm{Var}(I_{i,j}) + \sum_{(i,j)\neq(k,l)} \mathrm{Cov}(I_{i,j}, I_{k,l})$$

נחשב כל גורם:

- השונות של כל $I_{i,j}$ היא $\mathrm{Var}(I_{i,j}) = \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}$ (כי זו השונות של משתנה ברנולי).
- אם הזוגות (i,j) ו-(k,l) זרים, אז המשתנים $I_{i,j}$ ו-$I_{k,l}$ בלתי־תלויים, והשונות המשותפת שלהם תהיה 0.

- אם יש איבר משותף בין הזוגות, נניח שהם (i,j) ו-(i,k), אז

$$\mathbb{E}[I_{i,j}I_{i,k}] = P(\text{לשלושתם יש אותו יום הולדת}) = \frac{1}{365^2}$$

ולכן

$$\mathrm{Cov}(I_{i,j}, I_{i,k}) = \frac{1}{365^2} - \left(\frac{1}{365}\right)^2 = 0$$

כלומר הם עדיין בלתי־מתואמים (ולמעשה, בלתי־תלויים).

לכן

$$.\mathrm{Var}(X) = \sum_{(i,j)} \mathrm{Var}(I_{i,j}) = \binom{30}{2} \cdot \frac{364}{365^2} \approx 1.1885$$

נזכור כי $\mathbb{E}[X] \approx 1.19$, ולכן

$$P(X \geq 5) = P(X - 1.19 \geq 5 - 1.19) \leq P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 3.81) \leq \frac{1.1885}{3.81^2} \approx 0.08$$

שזה שיפור משמעותי ביחס לחסם מרקוב שהשגנו.

טענה 6.7 (אי-שוויון צ'רנוף). יהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים בעלי התפלגות

$$.X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

נסמן $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. שימו לב ש-$\mathbb{E}[X] = 0$. אז לכל $a > 0$,

$$.P(X > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

תרגיל 6.8. בבחירות מתמודדות שתי מפלגות. מתוך ייאוש, ברירת המחדל של $4,000,001$ המצביעים היא להטיל מטבע הוגן ולהצביע בהתאם אליו לאחת משתי המפלגות. $3,000$ תושבי שכונת "לב הפארק" ברעננה החליטו להתאגד ולהצביע כולם למפלגה ב'. מה הסיכוי שהם ישפיעו על תוצאות הבחירות?

פתרון. נסמן על ידי X את ההפרש בין כמות הקולות של מפלגה א' לכמות הקולות הקולות של מפלגה ב', ונסמן $m = 4,000,001 - 3,000$. אז אפשר לכתוב $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ כשכל $.X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$ המצביעים ישפיעו אם ורק אם $0 < X < 3000$. נשים לב כי

$$P(0 < X < 3000) = P(X < 3000) - P(X \leq 0) \leq P(X < 3000) - \frac{1}{2} =$$
$$= 1 - P(X \geq 3000) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - P(X \geq 3000)$$

לפי אי-שוויון צ'רנוף,

$$P(X \geq 3000) \leq e^{-\frac{3000^2}{2 \cdot m}} \approx 0.3244$$

ולכן

$$.P(\text{ישפיעו}) \geq \frac{1}{2} - 0.3244 = 0.1756$$

6.2 פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה 6.9. יהי X משתנה מקרי.

א. **המומנט מסדר k של** X הוא $\mathbb{E}[X^k]$.

ב. **הפונקציה יוצרת המומנטים של** X היא $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

טענה 6.10. אם $k < l$ והמומנט ה-l של X קיים, אז גם המומנט ה-k של X קיים.

טענה 6.11 (תכונות הפונקציה יוצרת המומנטים). יהיו X, Y משתנים מקריים, ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$.

א. $M_X(t)$ מוגדרת עבור $t = 0$, ומתכנסת בקטע פתוח סביב 0 (אולי אינסופי, לא בהכרח סימטרי).

ב. אם X ו-Y בלתי־תלויים, $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$.

ג. $M_{aX+b}(t) = e^{tb} \cdot M_X(at)$.

ד. אם $M_X(t)$ קיימת וסופית בקטע פתוח סביב 0, אז כל המומנטים של X קיימים, ויש לה פיתוח טיילור $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} t^n$. בפרט, $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$.

ה. אם $M_X(t)$קיימת לכל t, אז היא קובעת את ההתפלגות של X.

תרגיל 6.12.

א. חשבו את הפונקציה יוצרת המומנטים של $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

ב. הסיקו כי אם $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ ו-$Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ בלתי־תלויים, אז $X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$.

פתרון.

א. נחשב על פי ההגדרה:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

הפונקציה מוגדרת בכל $\mathbb{R}$.

ב. כיוון ש-X ו-Y בלתי־תלויים,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}.$$

אבל זו הפונקציה יוצרת המומנטים של $\mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$, והפונקציה יוצרת המומנטים קובעת את ההתפלגות, לכן $X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$.

תרגיל 6.13. נניח כי $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. חשבו את $\mathbb{E}[X^{17}]$.

פתרון. אפשר לנסות לחשב ישירות, זה ידרוש הרבה אינטגרציה בחלקים והרבה סבלנות. או לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{ty} \cdot \lambda e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)y}\,\mathrm{d}y = \lambda \cdot \left(\frac{e^{(t-\lambda)y}}{t-\lambda} \right)_{y=0}^{y=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

אבל הפעם זה מוגדר רק כאשר $t < \lambda$ (אחרת האינטגרל לא מתכנס). במקרה שלנו $\lambda = 1$, לכן

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

מפיתוח טיילור של $M_X(t)$, נקבל $\frac{\mathbb{E}[X^{17}]}{17!} = 1$, לכן $\mathbb{E}[X^{17}] = 17!$.

6.3 התכנסויות של משתנים מקריים וחוקי המספרים הגדולים

הגדרה 6.14. תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים, ויהי X עוד משתנה מקרי.

א. אומרים ש-X_n **מתכנסת כמעט תמיד** ל-X, אם $P(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$.

ב. אומרים ש-X_n **מתכנסת בהסתברות** ל-X, אם לכל $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

ג. אומרים ש-X_n **מתכנסת בהתפלגות** ל-X, אם לכל נקודת רציפות t של F_X מתקיים $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$.

טענה 6.15. התכנסות כמעט תמיד $\Leftarrow$ התכנסות בהסתברות $\Leftarrow$ התכנסות בהתפלגות.

תרגיל 6.16. נניח $X_n \sim \mathrm{Ber}(\frac{1}{n})$. באילו מובנים X_n מתכנסת, ולאיזה גבול?

פתרון. ברור שאם היא מתכנסת, היא צריכה להתכנס ל-0. נראה שהיא מתכנסת בהסתברות (ולכן גם בהתפלגות), אבל לא כמעט תמיד.

- התכנסות בהסתברות: לכל $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- אין התכנסות כמעט תמיד: נשים לב כי

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = P(\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : X_n = 0) = P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \{\forall n \geq N : X_n = 0\} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} P\left(\forall n \geq N : X_n = 0\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=N}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0$$

כשאנחנו עורכים ניסוי כלשהו מספר רב של פעמים, אפשר לשאול איך תיראה תוצאה סטנדרטית. אחת הדרכים לשאול את זה היא לשאול מה יהיה הממוצע של התוצאות. בעולם מתוקן, היינו רוצים לדעת שהממוצע של הדגימות יתכנס לתוחלת של ההתפלגות; את זה מבטיחים לנו שני המשפטים הבאים:

משפט 6.17 (החוק החלש של המספרים הגדולים)**.** תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים, בעלי אותה תוחלת μ ושונות σ^2. אז

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{בהסתברות}} \mu.$$

משפט 6.18 (החוק החזק של המספרים הגדולים)**.** תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים, בעלי אותה תוחלת μ ושונות σ^2. אז

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{כמעט תמיד}} \mu.$$

שני המשפטים האלו מהווים את הבסיס לאינטואיציה שלנו של מהי תוחלת. הם מראים לנו שאם נטיל מטבע 1000 פעמים ונשאל באיזה אחוז מהפעמים קיבלנו "עץ", התשובה תהיה קרובה ל-500. כלומר כל החישובים התיאורטיים והמסובכים שאנחנו עורכים באמת קשורים למציאות.

6.4 משפט הגבול המרכזי

כדי לקבל גרסה כמותית יותר של התפלגות הממוצע, מגיע המשפט הבא:

משפט 6.19 (משפט הגבול המרכזי)**.** תהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות σ^2. אז

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{בהתפלגות}} \mathrm{N}(0,1).$$

מפה אנחנו מקבלים דרך להעריך את הסכום או הממוצע של דגימות. נניח שנתונים לנו n משתנים מקריים בלתי־תלויים ושווי התפלגות $X_1, \ldots, X_n$, ונניח ש-n מספיק גדול (לצורך חישובים סטטיסטיים למשל, "מספיק גדול" לרוב נחשב $n \geq 25$). אז

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathrm{N}\left(\mu n, \sigma^2 n\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathrm{N}\left(\mu, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2\right)$$

תרגיל 6.20. ב-120 חממות בצפון הארץ מגדלים עגבניות. ידוע שתוחלת יבול העגבניות מחממה אחת היא 1.2 טון, וסטיית התקן היא 0.4 טון.

א. מה ההסתברות שיבול העגבניות הכולל מכל החממות יהיה גדול מ-140 טון?

ב. ברמת הגולן יש 30 חממות. מדריך הטיולים הפופולרי באזור העריך שהיבול הממוצע מכל חממה באזור הוא לפחות 1.5 טון. בהסתמך על נתוני השאלה, מה ההסתברות שהמדריך צודק?

ג. בעקבות נזקי הקורונה הוחלט במשרד הבריאות לסגור את כל החממות שהיבול שלהן הוא פחות מטון. בהנחה שהתפלגות היבול מחממה היא נורמלית עם הנתונים הנ"ל, מה ההסתברות שייסגרו לפחות 30 חממות?

פתרון.

א. נסמן על ידי $X_1, \ldots, X_{120}$ את כמות היבול מכל חממה, ונסמן $Y_1 = \sum_{i=1}^{120} X_i$. לפי משפט הגבול המרכזי, ההתפלגות של Y_1 היא בקירוב $\mathrm{N}(1.2 \cdot 120, 0.4^2 \cdot 120) = \mathrm{N}(144, 19.2)$. לכן

$$P(Y_1 > 140) = P(\frac{Y_1 - 144}{\sqrt{19.2}} > \frac{140 - 144}{\sqrt{19.2}}) = P(Z > -0.913) =$$
$$= 1 - P(Z \leq -0.913) \approx 1 - 0.1814 = 0.8186$$

ב. כעת יש לנו 30 חממות $X_1, \ldots, X_{30}$, והמשתנה הוא $Y_2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} X_i$. לפי משפט הגבול המרכזי, ההתפלגות של Y_2 היא בקירוב $\mathrm{N}(1.2, \frac{0.4^2}{30})$. לכן

$$P(Y_2 \geq 1.5) = P(\frac{Y_2 - 1.2}{0.4/\sqrt{30}} \geq \frac{1.5 - 1.2}{0.4/\sqrt{30}}) = P(Z \geq 4.1) =$$
$$= 1 - P(Z < 4.1) \approx 0$$

ג. נחשב את הסיכוי של חממה כלשהי להיסגר:

$$P(X_i < 1) = P(\frac{X_i - 1.2}{0.4} < \frac{1 - 1.2}{0.4}) = P(Z < -0.5) = 0.3085.$$

כמות החממות שייסגרו היא משתנה בינומי $W \sim \mathrm{Bin}(120, 0.3085)$. רוצים לחשב את $P(W \geq 30)$. נקרב את W על ידי משתנה נורמלי (כדי לוודא שהקירוב טוב, כלל אצבע הוא $\mathbb{E}[W] \geq 5$, וזה אכן המצב פה). אז בקירוב

$$W \sim \mathrm{N}(120 \cdot 0.3085, 120 \cdot 0.3085 \cdot 0.6915) = \mathrm{N}(37.02, 25.6).$$

לכן

$$P(W \geq 30) \approx P(\mathrm{N}(37.02, 25.6) \geq 29.5) = P(Z \geq \frac{30 - 37.02}{\sqrt{25.6}}) = P(Z \geq -1.48) =$$
$$1 - P(Z \leq -1.48) \approx 1 - 0.06944 = 0.93056$$

תרגיל 6.21 (ממבחן). נניח ש-$X_i \sim U[0, e]$ משתנים מקריים רציפים, בלתי־תלויים, ובעלי התפלגות אחידה בקטע שצוין.

א. תארו את ההתפלגות של $Y_i = \log X_i$; רצוי על ידי פונקציית הצפיפות f_{Y_i}.

ב. חשבו את התוחלת ואת השונות $\mathbb{E}[Y_i]$, $\mathrm{Var}(Y_i)$.

ג. מצאו מספר a כך ש-$P(\prod_{i=1}^{100} X_i > a) = 0.95$.

פתרון.

א. אפשר להיעזר בטענה על הצפיפות, או לחשב ישירות. נשים לב שהתומך של Y_i הוא $(-\infty, 1)$. לכל t בטווח הזה,

$$F_{Y_i}(t) = P(Y_i \le t) = P(\log X_i \le t) = P(X_i \le e^t) = e^{t-1}$$

נגזור ונקבל $f_{Y_i}(t) = e^{t-1}$. כלומר $1 - Y_i \sim \mathrm{Exp}(1)$.

ב. מהתובנה האחרונה נובע ישירות $\mathbb{E}[Y_i] = 1 - \mathbb{E}[\mathrm{Exp}(1)] = 1 - 1 = 0$ ו-$\mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{Var}(\mathrm{Exp}(1)) = 1$.

ג. כדי למצוא את a נבחין ראשית כי $P(\prod_{i=1}^{100} X_i > a) = P(\sum_{i=1}^{100} Y_i > \log a)$. נסמן $S = \sum_{i=1}^{100} Y_i$; לפי משפט הגבול המרכזי, $\frac{S - 100 \cdot 0}{\sqrt{100} \cdot 1} = \frac{S}{10} \approx \mathrm{N}(0,1)$. לכן עלינו למצוא a שעבורו $P(S > \log(a)) = P(\frac{S}{10} > \frac{\log a}{10}) = 0.95$. אם נלך לטבלת ההתפלגות הנורמלית נקבל $\frac{\log a}{10} = 1.645$, כלומר $a = e^{16.45}$.